



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA
DE MÉXICO**

FACULTAD DE CIENCIAS

**FASES GEOMÉTRICAS Y EL PENDULO DE
FOCAULT**

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

FÍSICO

P R E S E N T A:

OSCAR CHAVEZ MOLINA



**DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Antonio Hernández Garduño
2010**

Dedicado a mis padres.

Maria, Andres y Cecilia.

*Hay hombres que lucha un dia y son buenos
Hay quienes luchan un año y son mejores
Hay otros que luchan muchos años y son muy buenos
Pero hay quienes luchan toda la vida, esos son imprescindibles.*

Bertolt Brecht

Agradecimientos

A mis padres y familia, por su cariño y apoyo incondicional, en mis deseos de llegar a ser físico.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, que a lo largo de mi vida se convirtió en mi segunda casa.

A mi director de tesis el Dr. Antonio Hernandez Garduño por su valioso tiempo en la dirección de mi tesis.

Resumen

Esta tesis tiene por objeto ilustrar la noción de fases geométricas utilizando el péndulo de Foucault como ejemplo fundamental.

Para poner nuestro trabajo en perspectiva, discutimos algunos antecedentes y aspectos históricos de la noción de *fase geométrica* en la física. Después de revisar las herramientas matemáticas que nos permiten abordar el tema desde el punto de vista de la geometría diferencial, calculamos la fase geométrica del péndulo de Foucault usando la teoría de conexiones en un contexto puramente geométrico. En la parte final del trabajo, abordamos nuevamente el problema de determinar la fase geométrica del péndulo de Foucault pero ahora desde un punto de vista físico tratando el problema como un sistema sobre un marco en movimiento con dos escalas de tiempo distintas, lo cual demanda aplicar una técnica de promediación. La conexión de Cartan-Hannay-Berry resulta ser la herramienta adecuada para atacar el problema.

Índice general

1. Introducción	3
2. Nociones básicas y resumen histórico	5
2.1. Conceptos básicos	5
2.1.1. El péndulo de Foucault	6
2.1.2. Historia del transporte paralelo	6
2.2. Fases geométricas en física	6
3. Fundamentos matemáticos sobre las fases geométricas	14
3.1. Haces fibrados	14
3.1.1. Ejemplo de un haz principal	18
3.2. Conexiones	20
3.2.1. Conexión de Ehresmann	21
3.2.2. Conexión de Ehresmann-Levi-Civita	22
3.2.3. Conexión en un haz principal	24
3.3. Holonomía	26
4. La fase geométrica para el péndulo de Foucault	28
4.1. Cálculo de la Fase usando el haz tangente a la esfera	28
4.1.1. Cálculo del Transporte Paralelo	31
4.1.2. Holonomía (versión 1)	33
4.2. Cálculo de la fase utilizando el haz tangente unitario a la esfera	34
4.2.1. Holonomía (versión 2)	37
5. El Péndulo de Foucault como un Sistema en Movimiento	39
5.1. Teoría de conexiones para sistemas en movimiento	40
5.1.1. Conexión de Cartan	40
5.1.2. Conexión inducida de Cartan	42
5.1.3. La conexión de Hannay-Berry	43
5.1.4. La Conexión de Cartan-Hannay-Berry	44

5.2. Calculo de la fase geométrica	46
6. Conclusiones	55

Capítulo 1

Introducción

La Geometría Diferencial es el marco matemático natural para describir la dinámica de los fenómenos físicos que ocurren en la naturaleza, desde la mecánica clásica con “el péndulo de Foucault”, hasta las teorías modernas de la física de altas energías “Yang-Mills”.

Muchos de los fenómenos que ocurren en la naturaleza son cíclicos, sin embargo las variables físicas que describen estos fenómenos no regresan a su valor inicial cuando completan un ciclo, un ejemplo de lo anterior aparece en mecánica clásica con el péndulo de Foucault, donde el plano de oscilación del péndulo, ha rotado un cierto ángulo después de que la tierra ha completado un ciclo en su movimiento de rotación. La descripción geométrica de la rotación del plano de oscilación del péndulo de Foucault consiste en considerar un marco anclado en un punto en la superficie de la tierra y luego, considerando a la tierra como una esfera, dicho marco lo movemos a lo largo de una curva cerrada sobre la esfera. Cuando regresamos al punto inicial, el marco ha sido rotado un ángulo θ por efectos de la curvatura.

El hecho de que las variables no regresen a su valor inicial después de completar un ciclo, como en el ejemplo del péndulo de Foucault, es indicativo del carácter intrínseco de la geometría en la dinámica del fenómeno, es decir, la geometría del espacio de configuración tiene un efecto determinante sobre la dinámica del sistema.

Desde el punto de vista físico, el que las variables no regresen a su valor inicial en un proceso cíclico, se describe diciendo que el sistema ha adquirido una *fase geométrica* o *Fase de Berry*; véase[2]. Las Fases geométricas aparecen primero en mecánica cuántica con Berry en [2] y posteriormente su contraparte clásica con Hannay [8], pero su origen se reporta en trabajos publicados muchos antes como el de Rytov [15]. Sin embargo, como des-

cribimos en el capítulo 4, las fases geométricas en el péndulo de Foucault se pueden ver como un concepto puramente geométrico en términos de la holonomía de una conexión en un haz fibrado.

A continuación describimos, para conveniencia del lector, el contenido de los capítulos que conforman esta obra.

En el capítulo 2 se hace una revisión histórica del concepto de fase geométrica y el concepto de transporte paralelo. En el capítulo 3 hacemos una revisión de la herramienta matemática que se necesita para comprender el fenómeno de holonomía, haciendo un breve repaso de la teoría de conexiones en haces fibrados. En los capítulos restantes nos restringimos únicamente a la interpretación de la fase geométrica para el péndulo de Foucault como la holonomía de una conexión en un haz fibrado.

Para ello, en el capítulo 4, calculamos la fase geométrica utilizando un punto de vista puramente geométrico, en donde la física del sistema se cifra en postular que instantáneamente el plano de oscilación del péndulo no rota alrededor del eje del péndulo. Este postulado nos permite ver al sistema como un haz fibrado con una conexión de Ehresmann. La fase geométrica la calculamos de dos maneras diferentes: a) resolviendo las ecuaciones diferenciales del transporte paralelo (a lo largo de una trayectoria sobre la esfera de latitud constante) y b) modificando nuestro haz fibrado para convertirlo en un haz fibrado principal (el haz unitario de la esfera) de tal suerte que podemos usar la fórmula de holonomía sin necesidad de resolver una ecuación diferencial.

En el capítulo 5 volvemos a estudiar el péndulo de Foucault pero ahora viéndolo como un *sistema en movimiento*. Nuestro objetivo en este capítulo es comprender la física asociada al efecto combinado del movimiento de la tierra y la dinámica del péndulo en un marco de referencia móvil anclado en la tierra. De esta manera la fase geométrica se interpreta como la holonomía de la conexión de Cartan-Hannay-Berry. Las nociones fundamentales que se incorporan en esta conexión son: a) la conexión de Cartan, que *corrige* las velocidades en el marco de referencia móvil anclado a la tierra con una contribución no-inercial que viene del movimiento de rotación de la tierra y b) promediar la conexión usando el hecho de que se tienen dos escalas de tiempo muy diferentes.

Capítulo 2

Nociones básicas y resumen histórico

Este capítulo resume algunos antecedentes fenomenológicos de la aparición de las fases geométricas en el contexto de la física. Para las ideas generales de este capítulo nos hemos basado en la síntesis histórica que hace M. Berry en [3]. Las descripciones detalladas y el desarrollo matemático, que ponemos en un lenguaje moderno, lo hemos tomado de [6].

2.1. Conceptos básicos

Uno de los rasgos más característicos en la física teórica del primero y último cuarto del siglo XX ha sido sin duda alguna el de su creciente geometrización. Pero es también en este siglo, donde aparece la física cuántica con la formulación de la mecánica cuántica, que los intentos de geometrizar a la física se ven colapsados, ya que algunas cantidades físicas se tornan indeterminadas en esta nueva teoría.

Concebir una teoría geométrica de la mecánica cuántica suena un poco ambicioso, sin embargo en las entrañas de esta teoría aparecen manifestaciones geométricas inherentes a la misma. Éste es el caso de las fases de Berry o fases geométricas, las cuales él reportó en [2].

Dos conceptos son importantes en el entendimiento de la fase geométrica reportada por Berry: el transporte paralelo (holonomía) y el teorema adiabático de la mecánica cuántica.

La holonomía es un fenómeno puramente geométrico que surge cuando variables que son gobernadas por los parámetros del hamiltoniano del sistema no regresan a su valor inicial, cuando los parámetros los variamos sobre

una curva cerrada (circuito).

2.1.1. El péndulo de Foucault

El péndulo de Foucault es un ejemplo físico cuyo plano de oscilación queda determinado por su dirección de oscilación, descrita por un vector unitario \vec{e} y que es siempre tangente a la superficie de la tierra, y por el eje del péndulo, descrito por un vector radial \vec{r} . El transporte paralelo del vector \vec{e} está descrito por la condición de que no rote respecto del eje vertical de la tierra \vec{r} . A pesar de esta condición, el vector \vec{e} no regresa a su posición inicial después de que el vector \vec{r} ha completado un ciclo. Recorriendo la curva generada por un círculo de latitud sobre la superficie de la tierra, en este ejemplo la holonomía es el ángulo entre la posición inicial y final del vector \vec{e} y es igual al ángulo sólido subtendido en el centro de la esfera por el circuito (círculo de latitud).

2.1.2. Historia del transporte paralelo

La noción de transporte paralelo es un concepto que se conocía desde los tiempos de Euclides para espacios con curvatura cero. En 1917 Levi-Civita introduce el transporte paralelo a lo largo de una curva en una variedad riemanniana. La idea geométrica es muy sencilla: dada una superficie y la envolvente de sus planos tangentes, conseguimos una superficie (desarrollable) con curvatura igual a cero. Regresando a los espacios tangentes, podemos efectuarlo de manera euclidiana, simplemente mover el vector sobre una curva conservando una dirección fija. Esta construcción depende de la curva que nos tomemos. Este concepto fue generalizado por Cartan, utilizando marcos móviles.

En 1930 aparecieron muchas generalizaciones del concepto de espacio producto. Los haces principales y vectoriales son los más familiares. Durante 1950 Kozul y Ehresmann definieron el concepto de conexión para haces vectoriales de una manera axiomática. Usando formas diferenciales a valores a un espacio vectorial lo hicieron para haces principales. Lo importante de este hecho radica en que es una generalización natural del concepto de transporte paralelo.

2.2. Fases geométricas en física

La fase geométrica reportada por Berry surge de la aproximación adiabática en la solución de la ecuación de Schrödinger para procesos cíclicos

donde el hamiltoniano depende de parámetros.

Consideremos un hamiltoniano $\hat{H}(R)$ que depende de parámetros externos $R = (x_1, \dots, x_n)$. La evolución adiabática del sistema está descrita por la dependencia temporal del hamiltoniano $\hat{H}(t) = \hat{H}(R(t))$ a lo largo de la curva $c(t) = R(t)$ en el espacio de parámetros. Pedimos que $c(t)$ sea una curva cerrada, i.e., $R(0) = R(T)$, para un tiempo $t = T$ muy grande comparado con el tiempo de evolución del sistema. Además asumimos que los eigenestados $|n(R(t))\rangle$ son discretos y no degenerados $\forall t$.

Si al tiempo $t = 0$ el sistema está en uno de los eigenestados $|n(R(0))\rangle$, entonces el estado del sistema a un tiempo posterior $t > 0$ está dado por

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left\{\frac{-i}{\hbar} \int_0^t E_n(R(s)) ds\right\} \exp(i\gamma_n(t)) |n(R(t))\rangle.$$

El primer término es la fase dinámica; el segundo es la fase geométrica, donde $\gamma_n(t)$ está definida por la siguiente integral

$$\gamma_n(t) = i \int_0^t \left\langle n(R(s)) \left| \frac{d}{ds} \right| n(R(s)) \right\rangle ds = \int_c A^{(n)},$$

donde $A^{(n)} = i \langle n(R) | dn(R) \rangle$ es 1-forma. Cuando $c(t)$ es una curva cerrada la fase total está dada por

$$\gamma_n(c) = \gamma_n(T) = \oint_C A^{(n)}.$$

Usando el teorema de Stokes, la fase geométrica $\gamma_n(c)$ lo podemos escribir como

$$\gamma_n(c) = \int_{\Sigma} F^{(n)} dS$$

donde Σ es una subvariedad en el espacio de parámetros tal que $\partial\Sigma = c(t)$ y la dos forma $F^{(n)}$ está definida por

$$F^{(n)} = -Im \langle dn(R) | \wedge | dn(R) \rangle.$$

Podemos citar el siguiente ejemplo donde aparecen manifestaciones geométricas ligadas a aspectos cuánticos. Esto concierne a un vector de estado con spin dado, entero o semientero, para la componente del spin a lo largo de una dirección \vec{r} . Un ejemplo es un eigenestado del spin $s = \pm 1/2$ de un neutrón en un campo magnético \vec{B} con dirección \vec{r} , el hamiltoniano del sistema está definido por

$$H = \frac{1}{2} \mu \sigma \cdot \mathbf{B}$$

donde $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ es el vector de matrices de Pauli y $\mathbf{B} \in R^3$ es el campo magnetico que lo identificamos como los parametros en el hamiltoniano. Escribiendo el campo magnetico en coordenadas esfericas

$$\mathbf{B} = B(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta),$$

tenemos el problema de valores propios

$$H(\mathbf{B}) = |\pm(\theta, \varphi)\rangle = E_{\pm}(\mathbf{B})|\pm(\theta, \varphi)\rangle.$$

Sus correspondientes energías estan dadas por

$$E_{\pm}(\mathbf{B}) = \frac{1}{2}\mu B$$

con vectores propios dados por

$$|+(\theta, \varphi)\rangle = \begin{vmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\theta}{2} \end{vmatrix}, \quad |-(\theta, \varphi)\rangle = \begin{vmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ e^{-i\varphi} \cos \frac{\theta}{2} \end{vmatrix}.$$

La *1-forma* para los estados $|\pm(\theta, \varphi)\rangle$ esta dada por

$$A^+ = i\langle +(\theta, \varphi)|d|+(\theta, \varphi)\rangle = -\frac{1}{2}(1 - \cos \theta)d\varphi,$$

$$A^- = i\langle -(\theta, \varphi)|d|-(\theta, \varphi)\rangle = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)d\varphi.$$

La *2-forma* esta dada por

$$F^{(+)} = -\frac{1}{2} \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$$

$$F^{(-)} = \frac{1}{2} \sin \theta d\theta \wedge d\varphi.$$

Si el cambio en la dirección del campo magnético \vec{B} es cíclica, tomada sobre una curva cerrada en la esfera unitaria de direcciones, el eigenestado asociado adquiere una fase geométrica

$$\gamma_{\pm}(c) = \int_{S^2} F^{\pm} = \mp \frac{1}{2} \Omega(c)$$

donde $\Omega(c)$ es el angulo solido subtendido por la curva en la esfera de direcciones.

Fases geométricas en óptica

Raymond Y.Chiao, Akira Tomita y Young-Shi Wu fueron los primeros en verificar experimentalmente la fórmula del ángulo sólido para la fase geométrica del eigenestado del spin[5]. Ellos realizaron un experimento simple: mandaron un haz de luz linealmente polarizado con dirección de propagación \vec{k} a lo largo de una fibra óptica en espiral.

Si la forma de la fibra es representada por una curva en el espacio

$$c : t \longrightarrow r(t)$$

consideremos su vector tangente unitario

$$\hat{t}(t) = \frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|} \in S^2$$

el cual nos define una curva $\hat{c}(t) \in S^2$ (*esfera de direcciones*). El hecho de que la dirección inicial y final de la fibra óptica sean la misma quiere decir que $\hat{c}(t)$ es una curva, i.e. $\hat{t}(0) = \hat{t}(T)$ para algún $T > 0$, y entonces tenemos la siguiente transformación

$$G : c(t) \longrightarrow \hat{c}(t).$$

Sea Σ el plano ortogonal a $\hat{t}(0) = \hat{t}(T)$ con una base ortonormal $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, y supongamos que $\varepsilon(0) = \varepsilon_1$ es el vector de polarización inicial. Entonces el vector de polarización final estaría dado por

$$\varepsilon(t) = R(\varphi)\varepsilon(0)$$

donde $R(\varphi)$ es una rotación $SO(2)$ en el plano Σ . Introduciendo los vectores de polarización

$$\varepsilon_{\pm} = \frac{\varepsilon_1 \pm i\varepsilon_2}{\sqrt{2}}$$

el estado de polarización inicial lo podemos escribir como

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_+ + \varepsilon_-}{\sqrt{2}}.$$

Entonces el estado de polarización inicial es una superposición de estados de polarización circular derecha ($s=1$) e izquierda ($s=-1$), los cuales al pasar a lo largo de la fibra adquieren una fase geométrica $\Omega(\hat{c})$ igual al ángulo sólido

subtendido por la curva \hat{c} en la esfera de direcciones. De aquí que el estado de polarización final estaría dado por

$$\begin{aligned}\varepsilon(T) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\Omega(\hat{c})}\varepsilon_+ + e^{i\Omega(\hat{c})}\varepsilon_-) \\ &= \varepsilon_1 \cos \Omega(\hat{c}) + \varepsilon_2 \sin \Omega(\hat{c}) \\ &= R(\Omega(\hat{c}))\varepsilon(0).\end{aligned}$$

Una manifestación de fase geométrica para la luz es por lo tanto la rotación del plano de polarización descrito por $\vec{\varepsilon}$ después de que la luz ha viajado a lo largo de una fibra óptica en espiral tal que la dirección de propagación inicial y final son la misma. El ángulo de rotación es igual al ángulo sólido $\Omega(\hat{c})$ descrito por una curva en la esfera de direcciones.

El trabajo publicado en 1941 por Vassily V. Vladimirkii [17] da una explicación preliminar al experimento de Chiao-Tomita-Wu y es el primer trabajo de anticipación a la fase geométrica reportada por M. Berry. Éste es una extensión del trabajo publicado en 1938 por Sergei M. Rytov el cual trataba acerca de el límite asintótico para ondas cortas de campos electromagnéticos en medios inhomogéneos. Vladimirkii estaba en desacuerdo con la derivación de la ley de refracción de Snell de la óptica geométrica ya que ésta ignoraba la naturaleza vectorial de la luz. Había una ley para transportar las direcciones \vec{e} y \vec{h} de los campos eléctricos y magnéticos. Él mostró que esta ley es un transporte paralelo del triedro ortogonal formado por \vec{e} , \vec{h} y la dirección del rayo \vec{r} . La contribución de Vladimirkii fue mostrar que la ley de difracción de Snell derivada por Rytov era no integrable (en el sentido del teorema de Frobenius) e implicaba la rotación del plano de polarización. En esencia la teoría que Vladimirkii y Rytov desarrollaron contiene la explicación del experimento del grupo de Chiao. (Una exposición moderna de la ley de Rytov se puede consultar en [6, secc. 6.1.3].)

Una manera diferente de generar fases geométricas en óptica es considerando luz que viaja en una dirección fija con cambios lentos en los estados de polarización. Este hecho fue anticipado por Pancharatnam en un trabajo publicado en 1956 [14]. Él investigó los patrones de interferencia producidos por un cristal anisotrópico y para ello tuvo que encontrar una manera de definir cómo dos haces de luz en diferentes estados de polarización (lineal y elíptico) podrían tener la misma fase.

Consideremos una onda electromagnética que viaja en la dirección \vec{k} la cual está descrita por

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = (E_+\varepsilon_+ + E_-\varepsilon_-)e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$$

donde $\omega = k/c$ (c es la velocidad de la luz), $E_{\pm} \in \mathbb{C}$ determinan el estado de polarización de la onda electromagnética. Podemos definir un vector complejo

$$d = (d_+, d_-) = \frac{(E_+, E_-)}{|\vec{E}|}$$

que en notación de Dirac lo podemos escribir como

$$|d\rangle = \begin{pmatrix} d_+ \\ d_- \end{pmatrix}.$$

La primera contribución de Pancharatnam fue establecer la diferencia de fase de dos estados distintos de polarización $|A\rangle, |B\rangle$ la cual está determinada pidiendo que la interferencia de los estados sea máxima

$$(\langle A| + \langle B|)(|A\rangle + |B\rangle) = |A|^2 + |B|^2 + 2\text{Re}\langle A|B\rangle$$

es decir que $\langle A|B\rangle$ tiene que ser real y positivo. La segunda observación importante de Pancharatnam fue establecer: la ley de preservación de fases de los estados de polarización no era transitiva. Un haz puede iniciar en un estado de polarización $|A\rangle$, después pasar a un estado $|B\rangle$ en fase con el estado $|C\rangle$, llegar a un estado $|C\rangle$ en fase con el estado $|B\rangle$, para terminar en el estado $|C\rangle$ no necesariamente en fase con el estado inicial de polarización $|A\rangle$, lo cual nos produce una diferencia de fases relativas entre diferentes estados de polarización de la luz.

El vector de polarización está descrito por

$$|d\rangle = \begin{pmatrix} d_+ \\ d_- \end{pmatrix}$$

tal que $|d\rangle$ es un vector propio con eigenvalor valor $1/2$ de una matriz hermitiana de la forma

$$H(\vec{r}) = \vec{r} \cdot \vec{\sigma} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \exp -i\varphi \\ \sin \theta \exp i\varphi & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

donde \vec{r} es un vector unitario escrito en coordenadas esféricas (θ, φ) que parametrizan S^2 el cual es la *esfera de Poincaré* ya que para cada $\vec{r} \in S^2$ define una matriz $H(\theta, \varphi)$ cuyo eigenvector $|d\rangle$ nos da un vector de polarización. En los polos con $\theta = 0, \theta = \pi$ se tiene que $d_- = 0$ y $d_+ = 0$ representan estados de polarización circular, en el ecuador cuando $\theta = \pi/2$

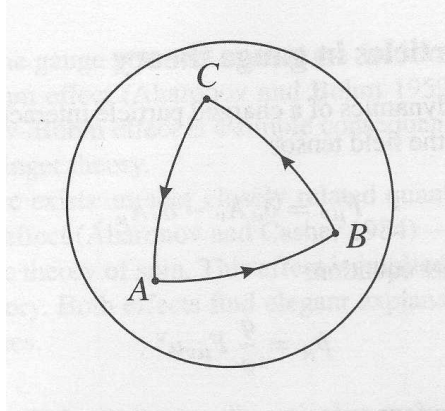


Figura 2.1: Esfera de Poincaré

tenemos polarización lineal y en los puntos restantes tenemos polarización elíptica.

Al cambiar los estados de polarización de la luz nos produce una curva cerrada γ en Σ , sean $|A\rangle$ y $|A'\rangle$ dos vectores que definen el mismo estado de polarización $|A'\rangle = e^{i\varphi}|A\rangle$ y supongamos que $|A'\rangle$ está en fase con $|C\rangle$, Pancharatnam descubrió que el cambio de fase está dado por

$$\varphi = -\frac{1}{2}\Omega_{ABC}(\gamma)$$

el cuál es la mitad el ángulo sólido subtendido por el triángulo geodésico en la esfera de Poincaré. Este descubrimiento en el lenguaje de hoy en día lo podemos llamar “la fase geométrica para estados de polarización de la luz”.

Fases geométricas en mecánica cuántica

La existencia de fases geométricas implica que los eigenestados cuánticos no son univaluados bajo continuación de los parámetros en el Hamiltoniano. Cuando las sacamos de su contexto original en la mecánica cuántica, las fases geométricas las podemos ubicar como una propiedad de las matrices que dependen de los parámetros. Sus vectores propios no son univaluados cuando realizamos un transporte paralelo vía cambios en los parámetros.

Un ejemplo son las matrices Hermitianas, real y simétricas, que en mecánica cuántica pueden representar Hamiltonianos de sistemas con simetría de reversión temporal, por ejemplo un sistema de partículas cargadas en campos eléctricos. Los vectores propios de estas matrices son reales y el cambio

de fase es π , que corresponde a un cambio de signo de los vectores propios. El cambio de signo ocurre únicamente si el circuito c encierra una degeneración del estado transportado.

Configuraciones nucleares nos pueden producir degeneración en las energías electrónicas. En 1958 H. Christopher Longuet-Higgins, Uno Öpik, Maurice H. L. Pryce y Robert A. Sack [10] notaron que en la solución de un modelo la parte electrónica de la función de onda cambia de signo cuando las coordenadas nucleares recorren un circuito encerrando una degeneración en las energías. El cambio de signo (holonomía) es π , donde las coordenadas las tomamos como parámetros. El Hamiltoniano del sistema corresponde a una matriz real simétrica.

Otros contextos

Actualmente las fases geométricas no son exclusivas de la mecánica cuántica. Han aparecido en diferentes áreas de la física, como estado sólido, partículas elementales, gravedad cuántica, por citar algunos ejemplos. Posteriormente al trabajo publicado por Berry aparecieron trabajos donde quita la condición de adiabaticidad y sólo se pide que la evolución sea cíclica; cf. [1]. También podemos encontrar las fases geométricas cuando la evolución del sistema no necesariamente se realiza en una curva cerrada; cf. [16].

Lo más importante es que el tema discutido en este capítulo es una manera de geometrizar fenómenos físicos en donde la dinámica está gobernada por la geometría.

Capítulo 3

Fundamentos matemáticos sobre las fases geométricas

En este capítulo elaboramos los requisitos matemáticos mínimos necesarios para poder abordar el tema de *fases geométricas*. Los resultados de este capítulo son básicamente una recopilación, elaboración y análisis de material expuesto en [6] y [11].

3.1. Hazes fibrados

La física teórica de este siglo ha tenido una tendencia a geometrizar los fenómenos que ocurren en la naturaleza. Una prueba de ello son las fases geométricas. Éstas ocurren en el contexto de un espacio abstracto llamado *haz fibrado*.

Un haz fibrado lo podemos entender como una variedad diferenciable que localmente se ve como el producto cartesiano de dos espacios, pero con geometría y topologías no triviales.

Para definir un haz fibrado necesitamos de 5 elementos:

1. Variedades: E = el haz (ó espacio total), M = el espacio base, F = la fibra estándar (ó típica).
2. Un grupo de Lie G , el cual actúa efectivamente en F , i.e. existe una acción

$$\Phi : G \times F \longrightarrow F,$$

tal que si $\Phi_g = \text{Id}$ entonces $g = e$

3. Una proyección:

$$\pi : E \longrightarrow M$$

tal que $F_x = \pi^{-1}(x)$, que la llamamos la fibra sobre $x \in M$, es homeomorfa a F .

Estos elementos no son independientes y se le pide que:

- El haz es localmente trivial, i.e., es localmente homeomorfo al producto cartesiano de dos espacios cartesianos. Para una cubierta abierta $\{U_i\}$ de $M \exists$ un conjunto de homeomorfismos

$$\varphi_j : \pi^{-1}(U_j) \longrightarrow U_j \times F$$

de la forma

$$\varphi_j(p) = (\pi(p), \phi(p))$$

donde $\phi_j : \pi^{-1}(U_j) \longrightarrow F$, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U_j) & \xrightarrow{\varphi_j} & U_j \times F \\ & \searrow \pi & \swarrow \text{proyeccion canonica} \\ & & U_j \end{array}$$

Al conjunto $\{U_j, \varphi_j\}$ se le llama una trivialización local.

- La restricción del mapeo ϕ_j a la fibra $x \in U_j$ define un difeomorfismo

$$\phi_{j,x} = \phi_j |_{F_x} : F_x \longrightarrow F$$

- Para una $x \in U_j \cap U_k$ el difeomorfismo inducido

$$\phi_{k,x} \circ \phi_{j,x}^{-1} : F \longrightarrow F$$

corresponde a un elemento de la estructura de grupo G , i.e. $\exists \gamma_{kj} \in G$ tal que

$$\Phi(\gamma_{kj}, \cdot) = \phi_{k,x} \circ \phi_{j,x}^{-1}.$$

Los mapeos

$$x \in U_j \cap U_k \longrightarrow \gamma_{kj}(x) \quad \forall x \in U_j \cap U_k$$

son llamadas funciones de transición. Ver la figura 3.1 (tomada de [6, §1.3]).

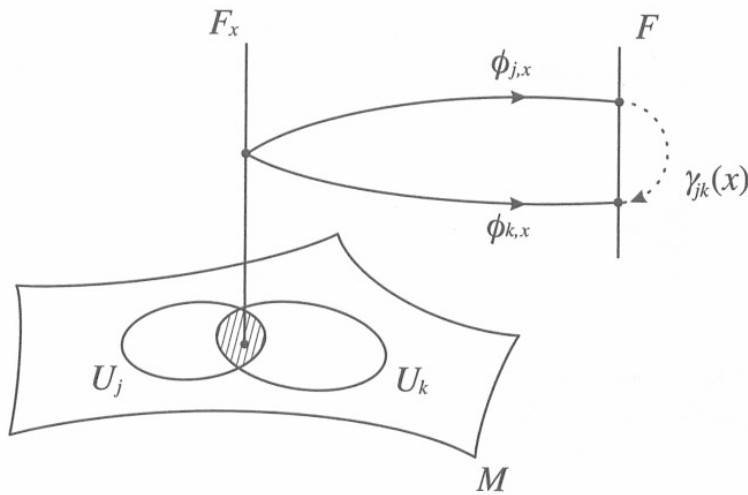


Figura 3.1: Funciones de transición

Definición 1. Un haz fibrado es trivial si

$$E \cong M \times F .$$

Esto es, existe un difeomorfismo $h : M \times F \longrightarrow E$ tal que

$$\pi(h(x, f)) = x$$

para cualquier $x \in M$ y $f \in F$.

Cualquier haz fibrado cuyo espacio base es contráctil es trivial. Por lo tanto los haces fibrados con espacio base el cual es topológicamente a una bola de R^n es trivial. Podemos construir haces fibrados cuando el espacio base no es contráctil (ejemplo: sobre una esfera de R^n). Un ejemplo de tal construcción es la banda de Möbius.

La banda de Möbius. Vamos a tomar como espacio base a S^1 , tomando las siguientes parametrizaciones

$$U_+ := \{\theta \mid -\epsilon < \theta < \pi + \epsilon\} \quad U_- := \{\theta \mid \pi - \epsilon < \theta < \epsilon\}$$

con $\epsilon > 0$. Tomemos como fibra típica a un intervalo de la recta real

$$F = [-1, 1] \subset R$$

parametrizado por $t \in [-1, 1]$. Para construir un haz fibrado con espacio base S^1 y fibra típica F , tenemos que pegar los conjuntos

$$\{U_+ \times F\} \text{ parametrizado por } (\theta, t_+)$$

y

$$\{U_- \times F\} \text{ parametrizado por } (\theta, t_-)$$

así como dar sus correspondientes funciones de transición en la intersección de $U_+ \cap U_- = A \cup B$ donde

$$A = \{\theta \mid -\epsilon < \theta < \epsilon\} \quad y \quad B = \{\theta \mid \pi - \epsilon < \theta < \pi + \epsilon\}.$$

Vamos a tomar como estructura de grupo a \mathbb{Z}_2 , el grupo que consta de dos elementos $(e, -e)$. Las correspondientes funciones de transición quedan definidas de la siguiente manera

$$\gamma_{+-}(\theta, t) = \begin{cases} e & \text{si } \theta \in A \\ -e & \text{si } \theta \in B \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{aligned} \gamma_{+-}(\theta, t) &\mapsto (\theta, t) & \text{si } \theta \in A \\ \gamma_{+-}(\theta, t) &\mapsto (\theta, -t) & \text{si } \theta \in B \end{aligned}$$

De esta manera podemos construir una 2-variedad que es la banda de Möbius.

Definición 2. Una sección local de un haz $\pi : \longrightarrow M$ es una transformación

$$f : U \longrightarrow E,$$

con $U \subset M$ tal que $\pi \circ f = \text{Id}_U$.

Una sección es global si ésta define en todo el espacio M . La existencia de secciones globales depende de la geometría global del haz.

En aplicaciones a la física los más importantes son los haces vectoriales y los haces principales:

- Un haz vectorial es un haz fibrado cuya fibra típica es un espacio vectorial de dimensión k , i.e. $F = R^k$ (o C^k en el caso de un haz complejo), con estructura de grupo G un subgrupo de $GL(k, \mathbb{R})$ o $GL(k, \mathbb{C})$.

- Un haz principal es un haz fibrado cuya fibra típica F coincide con la estructura de grupo G , el cual actúa en sí mismo por una acción izquierda L_g .

Proposición 1. *Para cualquier haz principal (P, M, π, G) existe una acción libre (derecha) de G en el espacio total P*

$$\tilde{R} : G \times P \longrightarrow P,$$

con la propiedad de que las órbitas coinciden con las fibras, i.e., si $p \in P$, entonces la G -órbita que pasa por p define una fibra sobre $x = \pi(p)$, i.e., $F_x = \mathcal{O}_p$.

Proposición 2. *Cada haz principal se puede obtener de la acción derecha que es libre de un grupo de Lie G sobre alguna variedad P .*

Para la demostración de las dos últimas dos proposiciones consultar [9, p. 52].

Observación. Dado un haz fibrado general $\pi : E \longrightarrow M$, con fibra típica F , podemos tomar como grupo de estructura a $G = \text{Diff}(F)$, es decir, el grupo de difeomorfismos de F sobre sí mismo. En este caso, y cuando la fibra típica quede clara por el contexto, usaremos a veces la notación (E, M, π) en lugar de la notación más larga (E, M, π, G, F) .

3.1.1. Ejemplo de un haz principal

Un ejemplo de un haz principal con aplicaciones en física es el haz de Hopf.

Consideremos la siguiente transformación

$$\pi : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\pi(z_1, z_2) = (\bar{z}_1 z_2 + z_1 \bar{z}_2, i(\bar{z}_1 z_2 - z_1 \bar{z}_2), |z_1|^2 - |z_2|^2) \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}^2.$$

Cualquier punto en S^3 lo podemos escribir de la siguiente manera.

$$s^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

$$z_1 = x_1 + ix_2 \quad z_2 = x_3 + ix_4$$

Es fácil ver que $\pi(S^3) \subset S^2$. La restricción de π a S^3 le llamamos la transformación de Hopf, una propiedad de π es ser $U(1)$ invariante, i.e

$\pi(e^{i\lambda}z_1, e^{i\lambda}z_2) = \pi(z_1, z_2)$. Esta propiedad nos permite construir un haz principal $(S^3, S^2, \pi, U(1))$.

La transformación

$$\pi : S^3 \longrightarrow S^2$$

en coordenadas está dada por

$$\pi(z_1, z_2) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$$

con

$$\xi_1 = 2(x_1x_3 + x_2x_4),$$

$$\xi_2 = 2(x_2x_3 - x_1x_4),$$

$$\xi_3 = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2.$$

Vamos a tomar una cubierta abierta para S^2 dada por $\{U_N, U_S\}$

$$U_N = S^2 - \{(0, 0, 1)\} \quad y \quad U_S = S^2 - \{(0, 0, -1)\}.$$

Utilizando la proyección estereográfica tenemos que un punto $p = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S^2$ lo podemos escribir como

$$z = \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1 - \xi_3} = \frac{x_1 + ix_2}{x_3 + ix_4} = \frac{z_1}{z_2} \quad \forall p \in U_N,$$

y

$$z = \frac{\xi_1 - i\xi_2}{1 + \xi_3} = \frac{x_3 + ix_4}{x_1 + ix_2} = \frac{z_2}{z_1} \quad \forall p \in U_S.$$

Ahora vamos a construir las trivializaciones locales

$$\varphi : \pi^{-1}(U_N) \longrightarrow U_N \times F$$

$$(z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{z_1}{z_2}, \frac{z_2}{|z_2|} \right)$$

$$\varphi : \pi^{-1}(U_S) \longrightarrow U_S \times F$$

$$(z_1, z_2) \mapsto \left(\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_1}{|z_1|} \right)$$

Es fácil ver que las trivializaciones están bien definidas ya que

$$z_2 \neq 0 \quad \forall p \in U_N \quad y \quad z_1 \neq 0 \quad \forall p \in U_S$$

así que la función de transición la construimos a partir de

$$\phi_N : (z_1, z_2) = \frac{z_1}{|z_1|} \quad \phi_S : (z_1, z_2) = \frac{z_2}{|z_2|}$$

y la correspondiente función de transición está dada por

$$\gamma_{NS} = \phi_N \circ \phi_S^{-1} = \frac{z_1}{|z_1|} \frac{|z_2|}{z_2}.$$

3.2. Conexiones

Una conexión en un haz fibrado es un objeto que nos permite comparar vectores entre diferentes fibras y nos da una regla de correspondencia para mover los vectores a lo largo de las fibras.

Consideremos a un haz fibrado arbitrario (E, M, π) , con fibra típica F . Dada una curva $\gamma(t)$ en el espacio base

$$[0, 1] \ni t \longrightarrow \gamma(t) \in M.$$

Una conexión nos da una manera de realizar el transporte paralelo de la fibra F a lo largo de γ . Nos define el siguiente mapeo

$$\Gamma_\gamma : F_{x_0} \rightarrow F_{x_1}, \quad x_0 = \gamma(0), \quad x_1 = \gamma(1),$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. Γ_γ depende continuamente en trayectoria γ
2. $\Gamma_{\gamma_1 * \gamma_2} = \Gamma_{\gamma_1} * \Gamma_{\gamma_2}$
3. $\Gamma_{\gamma^{-1}} = (\Gamma_\gamma)^{-1}$

Aquí la operación de multiplicación de curvas $\gamma_1 * \gamma_2$ es la *concatenación*: Si γ_1 y γ_2 dos curvas definidas en $[0, 1]$ tal que $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$, entonces $\gamma_1 * \gamma_2$ es una nueva curva definida por

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{para } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \gamma_2(2t - 1) & \text{para } \frac{1}{2} \leq t < 1. \end{cases}$$

La inversa γ^{-1} de la curva γ está definida por

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t).$$

Podemos definir de una manera equivalente una conexión, como sigue: Sea $v \in T_p E$, decimos que v es vertical si $v \in T_p F_x$ con $x = \pi(p)$, i.e. es vertical en p si es tangente a la fibra en p . Denotemos por V_p el espacio de vectores verticales en p

$$V_p = \{v \in T_p E \mid T_p \pi(v) = 0\}$$

entonces ahora V_p le llamamos el subespacio vertical de $T_p E$. Una conexión consiste esencialmente en asignar una distribución sobre el espacio total, $p \in E \mapsto H_p \subset T_p E$, tal que $T_p E = H_p \oplus V_p$. A H_p le llamamos el subespacio horizontal de $T_p E$. El transporte paralelo se obtiene entonces mediante un levantamiento *horizontal* $\tilde{\gamma}(t) \subset E$ de $\gamma(t)$, definido por la condición de que los vectores tangentes de $\tilde{\gamma}(t)$ tengan componente vertical nula.

3.2.1. Conexión de Ehresmann

Definición 3. Una conexión de Ehresmann sobre un haz fibrado (E, M, π) es una asignación suave de una distribución en cada $p \in E$, que define el siguiente mapeo

$$E \ni p \longrightarrow H_p \subset T_p E$$

tal que H_p es transversal a V_p , y

$$T_p E = V_p \oplus H_p$$

El espacio H_p es el subespacio horizontal de $T_p E$ y cualquier vector $v \in H_p$ es un vector horizontal, de aquí que cualquier vector $v \in T_p E$ debido a la descomposición de subespacios vectoriales lo podemos escribir como

$$v = \text{hor}(v) + \text{ver}(v)$$

donde $\text{hor}(v) \in H_p$ es la parte horizontal de v y $\text{ver}(v) \in V_p$ es la parte vertical de v .

Definición 4. Una curva

$$[0, 1] \ni t \longrightarrow c(t) \in E$$

decimos que es horizontal si su vector velocidad— dc/dt es horizontal, i.e, $dc/dt \in H_{\gamma(t)}$.

Sea $\gamma(t)$ una curva en M . Decimos que $\tilde{\gamma}$ es el **levantamiento** de γ si

$$\pi(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t).$$

Además $\tilde{\gamma}$ es un **levantamiento horizontal** si $\tilde{\gamma}$ es una curva horizontal.

Teniendo la definición de conexión en términos de distribuciones, podemos definir el transporte paralelo a lo largo de las fibras de la siguiente manera: Sea $\gamma(t)$ una curva en M tal que $\gamma(0) = x_0$ y $\gamma(1) = x_1$, sea $p_0 \in F_{x_0}$ y sea $\tilde{\gamma}(t)$ el levantamiento horizontal de $\gamma(t)$ tal que $\tilde{\gamma}(0) = p_0$, el transporte paralelo queda definido por el siguiente mapeo

$$\Gamma_\gamma(p_0) = \tilde{\gamma}(1) \in F_{x_1}$$

Γ_γ es llamado el operador de transporte paralelo determinado por la conexión. Es equivalente dar el mapeo $\gamma \longrightarrow \Gamma_\gamma$ a dotar un haz fibrado de una conexión, ya que en cada punto tenemos una manera de identificar vectores tangentes a las fibras.

Dada una distribución $H_p \in T_pE$, tenemos una forma dual para definirla, en términos de formas diferenciales que toman valores a un espacio vectorial V_p . El mapeo definido por

$$T_pE \ni u \longrightarrow \text{ver}(u) \in V_p$$

que a cada vector le asocia su parte vertical nos permite introducir una 1-forma $\mathcal{A} \in E$ con valores al subespacio vertical de T_pE ,

$$\mathcal{A}_p(u) = \text{ver}(u) \in V_p.$$

De aquí que el espacio horizontal lo podemos identificar como el espacio nulo o aniquilador de la 1-forma \mathcal{A} ,

$$H_p = \{v \in T_pE \mid \mathcal{A}_p(u) = 0\}.$$

Llamamos a \mathcal{A} la forma de conexión en E . La forma algebraica de definir la forma de conexión para un haz fibrado en general, nos permite introducir de manera natural una conexión en un haz fibrado principal, simplemente es transcribir la definición anterior, notando que ahora la fibra es un grupo de Lie G .

Recordemos que cualquier haz principal está equipado con una acción derecha $\tilde{R}_g : P \longrightarrow P$ en el espacio total. Vamos a pedirle en la definición de conexión que la asignación del subespacio horizontal H_p sea compatible con la acción.

3.2.2. Conexión de Ehresmann-Levi-Civita

Siguiendo a [7, Ejercicio 2 del capítulo 3] vamos a introducir una conexión de Ehresmann en $\pi : TM \longrightarrow M$. A esta conexión la llamaremos de *Ehresmann-Levi-Civita*. El nombre que le hemos asignado queda justificado por la proposición 3. Debido a que su definición queda completamente determinada por la métrica riemanniana sobre M , ésta resulta ser una conexión natural sobre TM .

Comenzamos introduciendo una métrica riemanniana en TM : sea $(p, v) \in TM$ y V, W vectores tangentes de TM en (p, v) . Consideremos las siguientes curvas

$$\alpha : t \longrightarrow (p(t), v(t)) \quad y \quad \beta : s \longrightarrow (q(s), w(s)) \quad \text{tal que}$$

$$p(0) = q(0) = p \quad , \quad v(0) = w(0) = v \quad y \quad V = \alpha'(0) \quad , \quad W = \beta'(0)$$

Definimos un producto interno en TM

$$\langle V, W \rangle_{(p,v)} = \langle d\pi(V), d\pi(W) \rangle_p + \left\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{Dw}{ds}(0) \right\rangle_p$$

el cual nos define una métrica riemanniana en TM .

Definición 5. Decimos que un vector $V \in T_{(p,v)}TM$ es horizontal si V es ortogonal a la fibra $F_p = d\pi^{-1}(p, 0) \subset T_{(p,v)}TM$ con la métrica antes definida en TM , donde el conjunto $d\pi^{-1}(p, 0)$ está definido por

$$d\pi^{-1}(p, 0) = \{\gamma(t) \in TM \mid \gamma(t) = (p, v(t))\} \cong T_pM.$$

A la conexión en (TM, M, π) definida de esta manera la llamaremos **conexión de Ehresmann-Levi-Civita**.

Consideremos la siguiente curva

$$(-1, 1) \longrightarrow c(t) \in M \quad y \quad V \in \mathcal{X}(M), V|_c = V(t)$$

Proposición 3. *El levantamiento $\tilde{c} = (x(t), v(t))$ es una curva horizontal $\iff V(t)$ es un campo paralelo (en el sentido de que su derivada covariante es nula).*

Observación. La derivada covariante queda determinada por la conexión afín de Levi-Civita. Es por ello que decimos que la proposición 3 justifica el nombre que le hemos asignado a la conexión introducida en la definición 5.

Demostración de la proposición 3. \Rightarrow) supongamos que \tilde{c} es una curva horizontal, sea $\gamma(s) \in d\pi^{-1}(p, 0)$ en coordenadas γ la podemos escribir

$$\gamma : s \longrightarrow (p, \sigma(s))$$

Sea $\tilde{c} : \longrightarrow (x(t), v(t))$ tal que $W = \tilde{c}'$ es un vector tangente en (p, v) , entonces tenemos que

$$\langle \tilde{c}'(0), \gamma'(0) \rangle_{(p,v)} = \langle d\pi(\tilde{c}'(0)), d\pi(\gamma'(0)) \rangle_p + \left\langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{D\sigma}{ds}(0) \right\rangle_p \quad (3.1)$$

La proyección $\pi : TM \longrightarrow M$

$$d\pi : T(TM) \longrightarrow TM$$

$$d\pi_{(p,v)}(\gamma'(0)) = (p, 0)$$

Entonces $0 = \langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{D\sigma}{ds}(0) \rangle_p$ la igualdad se da cuando $\frac{Dv}{dt}(0) = 0$ por lo tanto $V(t)$ es un campo paralelo

\Leftrightarrow Si $V(t)$ es un campo paralelo entonces es horizontal.

Sea $\gamma(s) \in d\pi^{-1}(p, 0)$ y $\tilde{c}' = (x(t), v(t))$ donde \tilde{c}' es paralelo, i.e $\frac{Dv(t)}{dt} = 0$

$$\langle \tilde{c}'(0), \gamma'(0) \rangle_{(p,v)} = \langle d\pi(\tilde{c}'(0)), d\pi(\gamma'(0)) \rangle_p + \langle \frac{Dv}{dt}(0), \frac{D\sigma}{ds}(0) \rangle_p$$

$$\langle \tilde{c}'(0), \gamma'(0) \rangle_{(p,v)} = \langle d\pi(\tilde{c}'(0)), d\pi(\gamma'(0)) \rangle_p = 0$$

ya que $d\pi(\gamma'(0)) = 0$ concluimos que $\tilde{c}(t) = (x(t), v(t))$ es una curva horizontal. \square

Los espacios horizontales en $T(TM)$ los identificamos con curvas

$$(-1, 1) \longrightarrow c(t) \in M \quad y \quad V \in \mathcal{X}(M) \quad \text{tal que} \quad \frac{Dv}{dt} = 0$$

de aquí que la conexión inducida por la métrica en TM está definida por:

$$H_{(p,v)} = \{V \in T_{(p,v)}(TM) \mid \langle V, V \rangle_{(p,v)} = \langle d\pi(V), d\pi(V) \rangle_p\}.$$

Los espacios verticales en $T(TM)$ los identificamos con

$$V_{(p,v)} = \{V \in T_{(p,v)}(TM) \mid \langle V, V \rangle_{(p,v)} = \langle \frac{Dv}{dt}, \frac{Dv}{dt} \rangle_p\}.$$

Todo vector vertical en $T(TM)$ se puede ver como la derivada de una curva $\beta(t)$ en $\pi^{-1}(p) = T_pM$, es decir $\beta(t) = (p, w(t))$. En este caso, $w'(t) = Dw/dt$. Por lo tanto, si $V = \alpha'(t)$, con $\alpha(t) = (p(t), v(t))$, entonces $\text{ver}(V) = (p(0), v(0), 0, Dv/dt)$. Por lo tanto, la 1-forma de conexión está dada por

$$\mathcal{A} : T_{(p,v)} \longrightarrow V_{(p,v)}, \quad \mathcal{A}(V) = \frac{Dv}{dt}.$$

3.2.3. Conexión en un haz principal

Definición 6. Una *conexión principal de Ehresmann* en un haz principal (P, M, π, G) es una asignación suave de subespacios lineales H_p de T_pP

$$P \ni p \longrightarrow H_p \subset T_pP$$

tal que satisface las siguientes condiciones:

1. El mapeo lineal

$$T_p\pi : H_p \longrightarrow T_{\pi(p)}M$$

es un isomorfismo $\forall p \in P$

2. La asignación de los subespacios H_p son invariantes bajo la acción derecha de G , i.e,

$$T_p\tilde{R}_g(H_p) = H_{pg} \quad \forall p \in P \quad y \quad g \in G.$$

Para definir la 1-forma de conexión \mathcal{A} , dado que \mathcal{A} toma valores V_p y para haces principales $F = G$, tenemos un isomorfismo entre V_p y \mathfrak{g} .

Este isomorfismo se construye de la siguiente manera: para haces principales tenemos la acción derecha \tilde{R}_g , así que tomemos ξ en \mathfrak{g} y sea X_ξ el generador infinitesimal de la acción definida por

$$\tilde{R}_\xi(t, p) = \tilde{R}(\exp(t\xi), p) \quad \tilde{R}_{\exp(t\xi)} : P \longrightarrow P \quad X_\xi(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \tilde{R}_{\exp(t\xi)}(p)$$

ya que

$$\tilde{R}_{\exp}\xi p = p(\exp_\xi) \quad \forall p \in P$$

es una curva en P que en $t = 0$ pasa por p , utilizando la proyección, se tiene que

$$\pi(\tilde{R}_{\exp(t\xi)}(p)) = \pi(p \exp(t\xi)) = u.$$

La curva está en la fibra $u = \pi(p)$. El generador infinitesimal es tangente a la fibra en G_p y de aquí que $X_\xi(p) \in V_p$.

El mapeo dado por

$$\mathfrak{g} \ni \xi \mapsto X_\xi(p) \in V_p$$

nos define un isomorfismo entre \mathfrak{g} y V_p . Este isomorfismo lo podemos usar para definir la 1-forma de conexión. El campo vectorial

$$P \ni p \rightarrow X_\xi(p)$$

es llamado el campo vectorial fundamental. Para $v \in V_p$, sea \hat{v} un único elemento en \mathfrak{g} tal que

$$X_{\hat{v}}(p) = v.$$

Definición 7. Una forma de conexión \mathcal{A} en un haz fibrado principal (P, M, π, G) es una 1-forma en P con valores en \mathfrak{g} definida por

$$\mathcal{A}(u) = \widehat{veru},$$

para cualquier $u \in \mathcal{X}(P)$.

3.3. Holonomía

Sea $\pi: P \longrightarrow M$ un haz principal y supongamos que dotamos al haz de una forma de conexión. Sea:

$$[0,1] \ni t \longrightarrow \gamma(t) \ni M \quad \text{tal que} \quad \gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x_1.$$

Definimos el transporte paralelo de $\pi^{-1}(x_0) \longrightarrow \pi^{-1}(x_1)$ a lo largo de la curva γ de la siguiente manera:

$$\pi^{-1}(x_0) \ni p_0 \rightarrow \Gamma_\gamma(p_0) = \tilde{\gamma}(1) \in \pi^{-1}(x_1)$$

donde $\tilde{\gamma}$ es el único levantamiento horizontal de γ tal que $\tilde{\gamma}(0) = p_0$.

Ahora vamos a considerar una curva cerrada γ tal que $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$, entonces de la definición de transporte paralelo el cual nos induce un difeomorfismo en la misma fibra $\pi^{-1}(x_0)$ llamado la holonomía de la curva γ .

El transporte paralelo manda yuxtaposiciones de lazos en x_0 en la composición de difeomorfismos de $\pi^{-1}(x_0)$. De aquí se sigue que la operación de holonomía es un grupo. Determina un único elemento $\Phi[\gamma]$ de G ,

$$\Gamma_\gamma(p_0) = p_0 \Phi[\gamma].$$

Fijemos $p_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, consideremos el siguiente conjunto:

$$\text{Hol}(p_0) = \{\Phi[\tilde{\gamma}] \mid \gamma \text{ es cerrada, } \gamma(0) = \gamma(1) = x_0, \tilde{\gamma}(0) = p_0\}.$$

Holonomía de γ con referencia a p_0 . Sea $p'_0 = p_0 g$ puntos distintos en la misma fibra y se $\tilde{\gamma}'$ el levantamiento horizontal de una curva cerrada γ tal que $\tilde{\gamma}'(0) = p_0$

$$\Gamma(p'_0) = p'_0 \Phi[\tilde{\gamma}'] = p_0 g \Phi[\tilde{\gamma}']$$

$$\Gamma(p'_0) = \Gamma_\gamma(p_0) g = p_0 [\tilde{\gamma}'] g$$

de lo anterior tenemos que

$$\Phi[\tilde{\gamma}'] = g^{-1} \Phi[\tilde{\gamma}] g$$

Por lo tanto, los grupos de holonomía de $\text{Hol}(p_0)$ y $\text{Hol}(p_0 g)$ son isomorfos.

En el caso de haces principales la holonomía se puede calcular de manera explícita, fijemos $p_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, asociado a cada Γ_γ un elemento $g \in G$

$$\text{Hol}(p_0) = p_0 g.$$

A esto le llamamos la holonomía medida de p

Proposición 4. Sea $\pi : P \longrightarrow M$ un G haz principal y sea \mathcal{A} la forma de conexión, sea γ una curva cerrada en M que esta contenida en un abierto U de M : Sea $f: U \subset M \longrightarrow P$ una sección local y sea $A = \mathcal{A}^* f$ la forma local de conexión, está definida en U . Sea $g(t)$ una solución a la ecuación diferencial

$$\frac{dg(t)}{dt} = -A\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)g(t) \quad (3.2)$$

con $g(0) = 1$. La holonomía de γ , medida de $s(\gamma(0))$ es $g(1)$.

La solución $g(t)$ de esta ecuación diferencial la podemos escribir

$$g(t) = \mathbb{P} \exp \left(\int_{\gamma} (f^* \mathcal{A})(m(t)).m'(t) dt \right)$$

donde \mathbb{P} es el operador de trayectoria.

La demostración de 4 aparece en [11, proposición 4.1, p. 40].

Observación. Si el grupo G es Abeliiano, en un caso particular g es de la forma $\exp \eta$. Entonces $TL_{g^{-1}}\dot{g} = \dot{\eta}$, de la proposición anterior el elemento de holonomía se puede calcular simplemente con una integral

$$g(1) = \exp \eta(1) = \exp \left(- \int_0^1 (f^* \mathcal{A})(m(t)).m'(t) dt \right) \quad (3.3)$$

sin necesidad de resolver la ecuación diferencial (3.2); cf. [11, §4B], donde $m(t)$ es una curva cerrada en el espacio base.

Capítulo 4

La fase geométrica para el péndulo de Foucault

El fenómeno de rotación del plano de oscilación del péndulo de Foucault se puede entender de la siguiente manera. Instantáneamente, la dirección \vec{e} de oscilación del péndulo no rota alrededor del eje radial \vec{r} de la tierra. Esta condición determina un transporte paralelo de \vec{e} a lo largo del círculo de latitud constante que la base del péndulo recorre debido a la rotación de la tierra. Geométricamente esto quiere decir que la *derivada covariante* de el vector de dirección \vec{e} es nula a lo largo del recorrido. El objetivo de este capítulo es entender este fenómeno desde el punto de vista de un transporte paralelo inducido por una conexión de Ehresmann. Del capítulo anterior, la conexión apropiada para describir el transporte paralelo del péndulo de Foucault es la conexión de Ehresmann-Levi-Civita introducida en la definición 5.

4.1. Cálculo de la Fase usando el haz tangente a la esfera

Consideremos el siguiente haz principal con estructura de grupo $G = \mathbb{R}^2$.

$$\pi : TS^2 \longrightarrow S^2$$

$$\pi : (p, v) \longrightarrow p$$

Puntos en el espacio total los identificamos como (p, v) , donde $p = X(\varphi, \theta)$ corresponden a puntos en la esfera bajo la parametrización

$$X(\varphi, \theta) = (\cos \varphi \cos \theta, \sin \varphi \cos \theta, \sin \theta), \quad (4.1)$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},$$

y donde $v = X_\varphi v_1 + X_\theta v_2$ y $v = (v_1, v_2) \in T_{X(\varphi, \theta)} S^2$ son las componentes de v en términos de la base $\{X_\varphi, X_\theta\}$ de TS^2 .

Definición 8 (Notación). Si $p = X(\varphi, \theta)$ y $v = v_1 X_\varphi + v_2 X_\theta$ entonces denotaremos el punto $(p, v) \in TS^2$ como $(\varphi, \theta; v_1, v_2)$.

Consideremos ahora la acción derecha en TS^2 dada por

$$\begin{aligned} \Phi : TS^2 \times G &\longrightarrow TS^2, \\ \Phi_h : TS^2 &\longrightarrow TS^2 \quad \text{donde } h = (h_1, h_2) \in G, \\ \Phi_h(\varphi, \theta, v_1, v_2) &\longrightarrow (\varphi, \theta; v_1 + h_1, v_2 + h_2). \end{aligned}$$

La acción anterior no está definida en los polos, ya que en esos puntos el vector X_φ se anula. Cualquier curva en TS^2 en coordenadas la escribimos como

$$\alpha : t \mapsto (\varphi(t), \theta(t); v_1(t), v_2(t))$$

de donde cualquier vector tangente a $\alpha(t)$ en coordenadas lo escribimos como

$$V = \dot{\alpha}(t) = (\dot{\varphi}(t), \dot{\theta}(t); \dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t)).$$

Los espacios *horizontales* dados por la conexión de Ehresmann inducida por la conexión de Levi Civita en TS^2 , de acuerdo a la sección 3.2.2, están definidos por

$$H_{(p,v)} = \{W \in T_{(p,v)}(TS^2) \mid \langle W, W \rangle_{p,v} = \langle d\pi(W), d\pi(W)_p \rangle\}.$$

Es claro que $\dim H_{(p,v)}$ es isomorfo a $T_p S^2$ por lo que $\dim H_{(p,v)} = 2$.

Una curva en la fibra $\pi^{-1}(p)$ en coordenadas la escribimos como

$$\gamma : s \longrightarrow (p; v_1(s), v_2(s)).$$

Los espacios verticales inducidos por la conexión son

$$V_{(p,v)} = \{V \in T_{(p,v)}(TS^2) \mid \langle V, V \rangle_{(p,v)} = \langle \frac{Dv}{dt}, \frac{Dv}{dt} \rangle_p\}.$$

Nuevamente es claro que $V_{(p,v)}$ es isomorfo a $T_p S^2$, por lo que $\dim V_{(p,v)} = 2$. De aquí podemos escribir $T_{(p,v)}(TS^2)$ como una suma directa de $V_{(p,v)}$ y $H_{(p,v)}$, *i.e.*, $T(TS^2) = H_{(p,v)} \oplus V_{(p,v)}$.

Sea \mathcal{A} la matriz que representa a la 1-forma de conexión ver $V = \frac{Dv}{dt}$, donde D/dt representa la derivada covariante asociada a la parametrización $X(\varphi, \theta)$

$$\begin{aligned} \frac{Dv}{dt} = & (v_1 + v_1\dot{\varphi}\Gamma_{11}^1 + v_2\dot{\varphi}\Gamma_{12}^1 + v_1\dot{\theta}\Gamma_{21}^1 + v_2\dot{\theta}\Gamma_{22}^1) \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ & + (v_2 + v_1\dot{\varphi}\Gamma_{11}^2 + v_2\dot{\varphi}\Gamma_{12}^2 + v_1\dot{\theta}\Gamma_{21}^2 + v_2\dot{\theta}\Gamma_{22}^2) \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Entonces \mathcal{A} es una matriz de 2×4 , ya que $\mathcal{A}(V) = \frac{Dv}{dt}$.

Los símbolos de Christoffel para la parametrización (4.1) son:

$$\begin{array}{ll} \Gamma_{11}^1 = 0 & \Gamma_{11}^2 = \cos \theta \sin \theta \\ \Gamma_{12}^1 = -\tan \theta & \Gamma_{12}^2 = 0 \\ \Gamma_{21}^1 = -\tan \theta & \Gamma_{21}^2 = 0 \\ \Gamma_{22}^1 = 0 & \Gamma_{22}^2 = 0 \end{array}$$

Por lo tanto:

$$\frac{Dv}{dt} = (v_1 - v_2\dot{\varphi} \tan \theta - v_1\dot{\theta} \tan \theta) \frac{\partial}{\partial \varphi} + (v_2 + v_1\dot{\varphi} \cos \theta \sin \theta) \frac{\partial}{\partial \theta}$$

Entonces la matriz de la 1-forma de conexión está dada por

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -v_2 \tan \theta & -v_1 \tan \theta & 1 & 0 \\ v_1 \cos \theta \sin \theta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observación. Notemos que \mathcal{A} no es G -equivariante respecto a la acción definida en $T_p S^2$ ya que depende de (v_1, v_2) elementos de $T_p S^2$.

La observación anterior implica que la conexión de Ehresmann que hemos definido en esta sección no es una conexión que preserve los espacios horizontales, debido a la siguiente

Proposición 5. Sea $\mathcal{A} : TP \rightarrow \mathfrak{g}$ la 1-forma de conexión asociada a una conexión de Ehresmann definida sobre un haz fibrado principal (P, M, π, G) . Entonces \mathcal{A} es G -equivariante sii el levantamiento de la acción preserva los espacios horizontales. Es decir, si $\varphi : G \times P \rightarrow P$ denota la acción (izquierda) de G sobre P , entonces

$$\text{Hor}_{(\varphi_g(p))} = d\varphi_g \cdot \text{Hor}_p$$

si y sólo si

$$\mathcal{A}(d\varphi_g \cdot v_q) = \text{Ad}_g(\mathcal{A}(v_q)).$$

Prueba: Véase [6, proposición 1.3.7, p.43]. □

Observación. La proposición anterior nos dice que la conexión de Ehresmann que hemos definido en esta sección **no** es una *conexión principal* y por lo tanto no es aplicable la fórmula de holonomía de la proposición 4 para calcular la fase geométrica. Sin embargo, sí podemos calcular la holonomía resolviendo explícitamente una ecuación diferencial. A continuación describimos ese procedimiento. (En la sección 4.2 discutiremos una manera alternativa de calcular la fase sin necesidad de plantear una ecuación diferencial.)

4.1.1. Cálculo del Transporte Paralelo

Dotando a el haz $\pi : TS^2 \rightarrow S^2$ de una conexión, el transporte paralelo se calcula de la siguiente manera: consideremos un *paralelo* sobre la esfera, es decir la curva $\gamma(t) \in S^2$ que en coordenadas la escribimos como

$$[0, 2\pi] \ni t \rightarrow \gamma(t) = X(t, \theta_0) \quad \text{tal que} \quad \gamma(0) = \gamma(2\pi) = p_0,$$

cuyo levantamiento horizontal $\tilde{\gamma}(t)$ a TS^2 está dado por la siguiente expresión

$$\tilde{\gamma}(t) = (t, \theta_0; v_1(t), v_2(t)) \in TS^2.$$

Sea $\tilde{p}_0 = \tilde{\gamma}(0) = (0, \theta_0; v_1(0), v_2(0)) = (p_0, v) \in \pi^{-1}(p_0)$, $\tilde{p}_1 = \tilde{\gamma}(2\pi) \in \pi^{-1}(p_0)$. El transporte paralelo viene dado por

$$\Gamma_\gamma(\tilde{p}_0) = \tilde{\gamma}(2\pi) \in \pi^{-1}(p_0).$$

En este caso $\gamma(t)$ es una curva cerrada. El transporte paralelo es una transformación que regresa a la misma fibra $\pi^{-1}(p_0)$, es decir

$$\Gamma_\gamma : \pi^{-1}(p_0) \rightarrow \pi^{-1}(p_0)$$

dado que el levantamiento horizontal $\tilde{\gamma}(t)$ en general no es una curva cerrada $\tilde{\gamma}(0) \neq \tilde{\gamma}(2\pi)$, la transformación

$$\Gamma_\gamma(\tilde{p}_0) = \tilde{\gamma}(2\pi)$$

no regresa al mismo punto \tilde{p}_0 en la fibra $\pi^{-1}(p_0)$, *i.e.*, $\Gamma_\gamma(\tilde{p}_0) = \tilde{\gamma}(2\pi)\Phi[\tilde{\gamma}]$, donde $\Phi[\tilde{\gamma}] \in G$.

Para encontrar $\Gamma_\gamma(\tilde{p}_0)$ resolvemos la ecuación diferencial

$$\mathcal{A}(\tilde{\gamma}(t)).\dot{\tilde{\gamma}}(t) = 0. \tag{4.2}$$

La conexión restringida a la curva $\tilde{\gamma}(t)$ y aplicada a su vector tangente $\dot{\tilde{\gamma}}$ es la multiplicación de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} -v_2 \tan \theta & -v_1 \tan \theta & 1 & 0 \\ v_1 \cos \theta \operatorname{sen} \theta & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ v'_1 \\ v'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lo anterior nos lleva a resolver el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -v_2 \tan \theta + v'_1 &= 0 \\ v_1 \cos \theta + v'_2 &= 0 \end{aligned}$$

con condiciones iniciales

$$v(0) = (v_1(0), v_2(0))$$

El sistema anterior lo escribimos en forma matricial

$$\dot{v} = \begin{pmatrix} 0 & -\tan \theta \\ \cos \theta \operatorname{sen} \theta & 0 \end{pmatrix} v$$

cuya solución la escribimos de la siguiente manera

$$v(t) = \exp(tB)v_0, \text{ donde } B = \begin{pmatrix} 0 & -\tan \theta \\ \cos \theta \operatorname{sen} \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

El elemento en la misma fibra valuado en $t = 2\pi$ está dado por

$$v(2\pi) = \exp(B2\pi)v(0) \implies v(0) = \exp(-B2\pi)v(2\pi).$$

El primer paso para resolver (4.2) es observar que

Proposición 6. *El transporte paralelo preserva¹ la longitud del vector $v(t)$.*

Demostración. Queremos probar que

$$\frac{d}{dt} \langle v(t), v(t) \rangle = 0.$$

El producto punto está dado por la siguiente expresión

$$\langle v(t), v(t) \rangle = v(0)^T \exp(tB^T) M \exp(tB) v(0) \quad \text{con} \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta \operatorname{sen} \theta \\ \tan \theta \cos \theta^2 & 0 \end{pmatrix}$$

¹Esta proposición es consecuencia de un resultado general de geometría diferencial. Aquí aportamos una prueba elemental en el contexto de nuestro problema.

donde M es la matriz de la métrica en S^2 , entonces

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle v(t), v(t) \rangle &= \frac{d}{dt}(v(0)^T \exp(tB^T)M \exp(tB)v(0)) \\ &= v(0)^T \exp(tB^T)[B^T M + MB] \exp(tB)v(0)\end{aligned}$$

se verifica que el siguiente producto de matrices satisface

$$[B^T M + MB] = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\cos \theta_0 \sin \theta_0 \\ \tan \theta_0 \cos \theta_0^2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \cos^2 \theta_0 \tan \theta_0 \\ -\cos \theta_0 \sin \theta_0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

de donde se sigue que

$$\frac{d}{dt}\langle v(t), v(t) \rangle = 0$$

por lo que concluimos que la matriz $\exp(tB)$ satisface la siguiente relación

$$\exp(B^T t)M \exp(Bt) = M.$$

□

4.1.2. Holonomía (versión 1)

En esta subsección vamos a ocupar el resultado de la proposición 6 para resolver la ecuación diferencial (4.2).

Dada una curva $\gamma(t) \in S^2$ y el levantamiento horizontal $\tilde{\gamma}(t)$ a TS^2 ,

$$\tilde{\gamma}(t) = (\gamma(t), v(t)),$$

del cálculo anterior se tiene que el transporte paralelo preserva la longitud del vector $v(t)$. Entonces podemos escribir² $v(t)$ en términos del ángulo $\phi(t)$ que forma con el vector X_φ de la base unitaria $\{X_\varphi, X_\theta\}$:

$$v(t) = L \frac{\cos \phi(t)}{\cos \theta_0} X_\varphi + L \sin \phi(t) X_\theta,$$

donde L es la norma del vector v .

El levantamiento horizontal $\tilde{\gamma}(t) \in S^2$ en coordenadas lo escribimos de la siguiente manera

$$\tilde{\gamma}(t) = \left(t, \theta_0; \frac{L \cos \phi(t)}{\cos \theta_0}, L \sin \phi(t) \right)$$

²Esta idea aparece en el artículo de Oprea [13], en el cual nos inspiramos para comenzar a escribir este capítulo.

y

$$\tilde{\gamma}'(t) = \left(1, 0; \frac{-L \operatorname{sen} \phi(t)}{\cos \theta_0} \phi'(t), L \cos \phi(t) \phi'(t) \right).$$

Dado que la curva $\tilde{\gamma}$ horizontal, es necesario resolver las ecuaciones del transporte paralelo para encontrar la función $\varphi(t)$. Ya que estamos restringiendo la matriz de conexión \mathcal{A} a la curva $\tilde{\gamma}$, identificamos $v_1 = \frac{L \cos \phi(t)}{\cos \theta_0}$ y $v_2 = L \operatorname{sen} \phi(t)$. Las ecuaciones de transporte paralelo están definidas por

$$\mathcal{A}(\tilde{\gamma}(t)) \cdot (\tilde{\gamma}'(t)) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -L \operatorname{sen} \phi(t) \tan \theta_0 & \frac{-L \cos \phi(t)}{\cos \theta_0} \tan \theta_0 & 1 & 0 \\ \frac{L \cos \phi(t)}{\cos \theta_0} \cos \theta_0 \operatorname{sen} \theta_0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-L \operatorname{sen} \phi(t) \phi'}{\cos \theta_0} \\ L \cos \phi(t) \phi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

lo cual nos lleva a resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} -L \operatorname{sen} \phi(t) \tan \theta_0 - \frac{L \operatorname{sen} \phi(t)}{\cos \theta_0} \phi'(t) &= 0, \\ L \frac{\cos \phi(t)}{\cos \theta_0} \cos \theta_0 \operatorname{sen} \theta_0 + L \cos \phi(t) \phi' &= 0. \end{aligned}$$

Ambas expresiones definen la misma ecuación para $\phi'(t)$, que tiene por solución

$$\phi(t) = \phi_0 - \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \theta dt \quad y \quad \phi(2\pi) = -2\pi \operatorname{sen} \theta_0$$

donde $2\pi \operatorname{sen} \theta_0$ es la holonomía de la curva γ respecto de la conexión, *i.e* es el ángulo de rotación después de haber realizado el transporte paralelo a lo largo de un círculo máximo en la esfera.

4.2. Cálculo de la fase utilizando el haz tangente unitario a la esfera

En la sección anterior calculamos la holonomía del transporte paralelo resolviendo directamente la ecuación diferencial inducida por una conexión de Ehresmann. Como ya hicimos notar, el haz fibrado que consideramos en la sección anterior no es un haz fibrado principal porque la conexión no es G -equivariante. En esta sección volvemos a calcular la holonomía del transporte paralelo utilizando ahora una conexión principal lo cual nos va a

permitir calcular la holonomía a partir de la integral (3.3), sin necesidad de resolver una ecuación diferencial.

Para ello trabajaremos con un haz fibrado principal donde el espacio total es $(TS^2)^1$, el haz tangente unitario a la esfera (el conjunto de vectores unitarios tangentes a la esfera), y la fibra típica la identificamos con S^1 . En símbolos, el haz fibrado principal con el que vamos a trabajar es $((TS^2)^1, S^2, \pi, S^1)$.

Vamos a construir una 1-forma de conexión definida en el espacio total $(TS^2)^1$ jalando atrás la conexión de Ehresmann-Levi-Civita definida sobre TS^2 e identificando el álgebra de Lie de S^1 con el espacio tangente a $(TS^2)^1$.

De nuestros cálculos se verificará que la 1-forma de conexión así construida corresponde a una conexión principal. Como consecuencia de esto, será aplicable la fórmula de la proposición 4 para calcular la holonomía.

Sea

$$\pi : (TS^2)^1 \longrightarrow S^2 \quad \text{con} \quad G = S^1 \quad \text{y} \quad \mathfrak{g} = \mathbb{R}$$

un haz fibrado principal, donde

$$(TS^2)^1 = \{v \in T_p S^2 \mid \langle v, v \rangle = 1\}.$$

Puntos en el espacio total los identificamos bajo la siguiente parametrización local.

$$\Psi : S^2 - \{N, S\} \times S^1 \longrightarrow (TS^2)^1$$

$$\Psi(p, \theta) \mapsto \cos \theta E_u(p) + \sin \theta E_v(p)$$

donde el punto p corresponde a puntos en la esfera y $\{E_u, E_v\}$ son los vectores tangentes unitarios inducidas por la parametrización en el punto p

$$X(u, v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u),$$

$$0 \leq u \leq 2\pi, \quad -\pi/2 \leq v \leq \pi/2.$$

La acción en el espacio total (TS^2) está definida por

$$\Phi : S^1 \times (TS^2)^1 \longrightarrow (TS^2)^1,$$

$$\Phi : (\theta + \varphi, p) \longrightarrow \cos(\theta + \varphi)E_u(p) + \sin(\theta + \varphi)E_v(p).$$

La 1-forma de conexión en $(TS^2)^1$ se obtiene de jalar la conexión de Ehresmann en TS^2 :

$$\mathcal{A}_1 = \Psi^* \mathcal{A}.$$

Cuando jalamos atrás la 1-forma de conexión \mathcal{A} simplemente nos restringimos a fibras donde los vectores son unitarios. En coordenadas la escribimos de la siguiente manera:

$$\mathcal{A}_1 \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \mathcal{A}(\Psi(\theta, u, v)) \cdot \Psi_* \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix}$$

En el espacio total, a $\Psi(\theta, u, v)$ lo identificamos de acuerdo a las componentes del vector $v = (v_1, v_2)$. Aquí $v_1 = \frac{\cos \theta}{\cos v}$, $v_2 = \sin \theta$, por lo que

$$\Psi(\theta, u, v) = \left(u, v, \frac{\cos \theta}{\cos v}, \sin \theta \right),$$

así que,

$$\mathcal{A}(\Psi(\theta, u, v)) = \begin{pmatrix} -\sin \theta \tan v & -\frac{\cos \theta}{\cos v} \tan v & 1 & 0 \\ \frac{\cos \theta}{\cos v} \cos v \sin v & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

matriz que aplicamos al vector dado por

$$\Psi_* \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \frac{d}{dt} \Psi \circ (\alpha(t)) = \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ -\frac{\dot{\theta} \sin \theta}{\cos v} + \frac{\dot{v} \sin v \cos \theta}{\cos^2 v} \\ \dot{\theta} \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Haciendo el producto de matrices obtenemos el siguiente vector

$$\left(-\dot{u} \sin \theta \tan v - \dot{v} \frac{\cos \theta}{\cos v} \tan v - \dot{\theta} \frac{\sin \theta}{\cos v} + \frac{\dot{v} \sin v \cos \theta}{\cos^2 v}, \frac{\dot{v} \cos \theta \cos v \sin v}{\cos v} + \dot{\theta} \cos \theta \right).$$

Ya que existe un isomorfismo entre los espacios verticales y el generador infinitesimal de la acción, calculemos el generador infinitesimal de la acción

$$X_\xi(\theta, u, v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \Phi_{\exp t\xi}(\theta, u, v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(u, v, \frac{\cos(t\xi + \theta)}{\cos v}, \sin(t\xi + \theta) \right)$$

de donde obtenemos el siguiente vector

$$X_\xi(\theta, u, v) = \left(0, 0, -\frac{\xi \sin \theta}{\cos v}, \xi \cos \theta \right),$$

igualando el generador infinitesimal $X_\xi(\theta, u, v)$ con el vector vertical dado por $\Psi^* \mathcal{A}$ nos define un único elemento ξ de \mathfrak{g} , al cual le corresponde un único elemento en el subespacio vertical de $(TS^2)^1$,

$$-\frac{\xi \sin \theta}{\cos v} = -\dot{u} \sin \theta \tan v - \frac{\dot{\theta} \sin \theta}{\cos v}$$

así que

$$\xi = \dot{u} \operatorname{sen} v + \dot{\theta} ,$$

$$\xi = (1, \operatorname{sen} v, 0) \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} .$$

Por lo tanto, identificamos a la 1-forma de conexión como la matriz \mathcal{A}_1 de dimensiones 1×3 dada por

$$\mathcal{A}_1 = (1, \operatorname{sen} v, 0) .$$

Es importante notar que la conexión es G -equivariante respecto a la acción Φ , por lo que $\pi : (TS^2)^1 \rightarrow S^2$ es en efecto un haz fibrado principal con grupo de estructura S^1 .

4.2.1. Holonomía (versión 2)

Sea $\pi : (TS^2)^1 \rightarrow S^2$ con grupo $G = S^1$ y $\mathcal{A}_1 = (1, \operatorname{sen} v, 0)$ su 1-forma de conexión. Consideremos la curva cerrada $\alpha(t) \in S^2$

$$[0, 2\pi] \ni t \rightarrow \alpha(t) = (t, v_0) ,$$

la cual corresponde a un paralelo de radio máximo, y la sección local s

$$s : S^2 \rightarrow (TS^2)^1$$

$$(u, v) \in S^2 \mapsto \Phi(0, u, v) \in (TS^2)^1 .$$

En coordenadas la escribimos de la siguiente manera

$$\Psi(0, u, v) = \left(u, v, \frac{1}{\cos v}, 1 \right) .$$

El levantamiento de la curva α al espacio total $(TS^2)^1$, utilizando la sección s , es

$$\beta(t) = s \circ \alpha(t) = (0, t, v_0) .$$

El transporte paralelo a lo largo de la curva $\alpha(t)$ nos determina un único elemento $\Phi[\alpha]$ de G el cual es la holonomía de α , ya que en este caso el grupo es abeliano (véase la observación después de la proposición 4). La holonomía se calcula resolviendo la siguiente integral

$$g(2\pi) = \exp \left(- \int_0^{2\pi} (s^* \mathcal{A}_1)(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \right) = \exp \left(- \int_0^{2\pi} \mathcal{A}(\beta(t)) \cdot \beta'(t) dt \right)$$

$$g(2\pi) = \exp \left(- \int_0^{2\pi} (1, \text{sen } v_0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt \right) = \exp \left(- \int_0^{2\pi} \text{sen } v_0 dt \right)$$

$$g(2\pi) = \exp(-2\pi \text{sen } v_0)$$

Dado que en este caso la función \exp es la identidad tenemos que $\Phi[\alpha] = g(2\pi) = -2\pi \text{sen } v_0$, el cual corresponde el ángulo de rotación del plano de oscilación de un péndulo sobre la superficie de la tierra, después de que está ha completado un ciclo completo en su movimiento de rotación.

Supongamos que nosotros estuviéramos en el ecuador, donde $v = 0^\circ$ en este punto el plano de oscilación no tiene rotación alguna, más sin embargo en el polo norte, $v = \pi/2$ la rotación del plano de oscilación está en dirección opuesta a la rotación de la tierra y toma su máximo valor, el cual indica que el plano de oscilación ha completado un ciclo en un movimiento circular.

Capítulo 5

El Péndulo de Foucault como un Sistema en Movimiento

En éste capítulo vamos a estudiar el péndulo de Foucault como un *sistema en movimiento*. Con esto queremos decir que vamos a ver al péndulo de Foucault como un sistema en un marco de referencia que a su vez se mueve en un espacio ambiente. De esta manera, el péndulo de Foucault se puede ver como un péndulo esférico en un marco de referencia (pensemos en un cuarto en algún *museo de la ciencia* donde se ha montado el péndulo) que se mueve por la rotación de la tierra.

Vamos a calcular la fase geométrica basándonos en la noción de *conexión de Cartan*, de acuerdo a como ésta se define en [11]. La conexión de Cartan está definida en $Q \times M$, donde Q es el espacio de configuración anclado en un sistema de referencia móvil y M es el espacio de encajes de Q en el espacio ambiente (de tal suerte que una curva en M describe la evolución del sistema de referencia en el espacio ambiente.)

La conexión de Cartan induce una conexión en $T^*Q \times M$, donde T^*Q es el espacio fase en el sistema de referencia móvil. Esta *conexión inducida de Cartan* captura la dinámica que se obtiene al combinar la dinámica en T^*Q con el movimiento impuesto en M .

Calcular la holonomía usando la conexión inducida de Cartan es todavía un problema innecesariamente complicado. Para nuestro péndulo de Foucault podemos aprovechar que tenemos dos escalas de tiempo muy diferentes: por un lado tenemos las oscilaciones del péndulo en el marco de referencia móvil, cuyo periodo es del orden de segundos, y por otro lado tenemos la rotación de la tierra cuyo periodo es del orden de *un día*.

La manera adecuada de proceder cuando se tienen dos escalas de tiempo

tan distintas es usando alguna técnica de promediar. En el contexto de la teoría de conexiones, la herramienta adecuada para promediar es el método de la *conexión de Hannay-Berry*. Este método consiste en lo siguiente: dada una conexión de Poisson-Ehresmann y un grupo de Lie G , que actúa mediante transformaciones compatibles con la estructura de haz fibrado y de manera Hamiltoniana, la conexión de Hannay-Berry se obtiene promediando con respecto a la acción de G . La conexión de Hannay-Berry resulta ser una conexión de Ehresmann *natural* en el sentido de que su levantamiento horizontal preserva el momento asociado a la acción de G .

En el caso del péndulo de Foucault, G será el grupo de rotaciones alrededor del eje del péndulo, que es precisamente el grupo de simetría del espacio fase en el marco de referencia *del museo*.

La conexión que se obtiene al aplicar el método de promediación de Hannay-Berry a la conexión inducida de Cartan se conoce como la *conexión de Cartan-Hannay-Berry*.

5.1. Teoría de conexiones para sistemas en movimiento

En esta sección vamos a discutir las distintas conexiones relevantes en la descripción de un sistema en movimiento como lo es el péndulo de Foucault, culminando con la definición de la conexión de Cartan-Hannay-Berry. (El material que aquí se expone está tomado de [11].)

5.1.1. Conexión de Cartan

Consideremos una variedad Q como el espacio de configuración de un sistema físico, el cual está inmerso en una variedad riemanniana S , y sea M el espacio de encajes de Q en S . Un ejemplo es una canica que se mueve sin fricción sobre un aro parametrizado por una curva $\alpha(t) \in \mathbb{R}^3$, la cual está rotando alrededor de un eje arbitrario \vec{n} . El espacio de configuración es la curva $\alpha(t)$, la cual está inmersa en \mathbb{R}^3 y cada rotación nos define un encaje de la curva $\alpha(t)$ en \mathbb{R}^3 . En este caso el espacio de encajes M es el grupo G de rotaciones alrededor del eje \vec{n} . (Véase la figura 5.1.)

Para la aplicación a fenómenos físicos, se quiere estudiar los movimientos superpuestos en Q y en M . Para ello consideremos el siguiente haz fibrado trivial

$$\pi : Q \times M \longrightarrow M ,$$

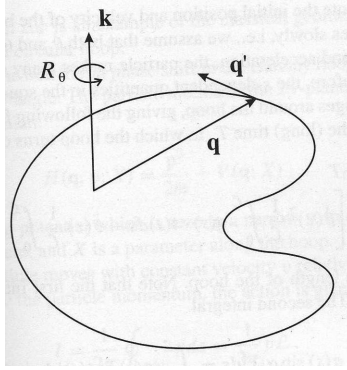


Figura 5.1: Canica deslizando sobre un aro que esta rotando. (Figura tomada de [6].)

así que el espacio vertical lo identificamos con

$$V_{(q,m)} = \ker T_{(q,m)}\pi = \{(\vec{v}_q, 0) \in T_{(q,m)}(Q \times M) \mid \vec{v}_q \in T_q Q\}.$$

Un vector en el espacio de encajes M , anclado en $m \in M$, es un campo vectorial sobre la imagen de m , es decir, una transformación

$$U_m : Q \longrightarrow TS, U_m(q) \in T_{m(q)} S.$$

Consideremos un encaje

$$m : Q \longrightarrow S.$$

El haz tangente TS lo podemos descomponer en una suma directa

$$T_{m(q)} S = T_{m(q)} Q \oplus (T_{m(q)} Q)^\perp$$

donde el subespacio ortogonal se toma respecto a la métrica g de S .

Tomemos la proyección ortogonal de $U_m(q)$ a $T_{m(q)} m(Q) = (T_q m)(T_q Q)$. Denotemos a este vector por $(U_m(q))^T$; de esta manera hemos definimos otro elemento de $T_m M$. Podemos jalar atrás atrás $(U_m(q))^T$ aplicando

$$Tm^{-1} : T_{m(q)} m(Q) \subset TS \longrightarrow T_q Q$$

y así definir

$$\mathcal{U}(q) := Tm^{-1}((U_m(q))^T),$$

lo cual nos da un campo vectorial $\mathcal{U} \in \mathcal{X}(Q)$. Más en general, para $Z \in \mathcal{X}(M)$ definimos

$$Z^m(q) = Tm^{-1}((Z_m(q))^T).$$

La transformación

$$M \ni m \longrightarrow Z(m)^T$$

define un campo vectorial en M que lo vamos a denotar por Z^T , entonces para cada $m \in M$,

$$Z^m = Tm^{-1}(Z^T(m)) \in \mathcal{X}(Q) .$$

Para sistemas en movimiento elegimos los encajes a ser las restricciones de isometrías de S .

Definición 9. La conexión de Cartan en $\pi : Q \times M \longrightarrow M$ es la 1 - forma $\gamma_c \in \omega^1(Q \times M, \ker T\pi)$ definida por

$$\gamma_c(q, m)(U_q, U_m) = \left(U_q + (Tm^{-1} \circ (U_m(q))^T), 0 \right)$$

donde $(U_m(q))^T$ denota la componente tangencial a TQ .

El espacio horizontal de está conexión esta dado por

$$H(q, m) = \ker \gamma_c(q, m) = \{ -(Tm^{-1} \circ (U_m(q))^T), U_m \mid U_m \in T_m M \} .$$

Se verifica que $T(Q \times M) = H \oplus V$. Por lo tanto la conexión de Cartan define una conexión de Ehresmann en $\pi : Q \times M \longrightarrow M$.

El levantamiento horizontal de un campo vectorial $Z \in \mathcal{X}(M)$ está dado por

$$(hor_c Z)(q, m) = \left(- (Tm^{-1} \circ Z^T(m))(q), Z_m \right) .$$

5.1.2. Conexión inducida de Cartan

Cuando estudiamos la evolución temporal de un sistema nos fijamos en su flujo Φ_t en el espacio fase T^*Q . En el caso de sistemas en movimiento tenemos la superposición de movimientos en T^*Q y de M . Una conexión en el haz $\pi : T^*Q \times M \longrightarrow M$ nos permite comparar la superposición de movimientos en T^*Q y M con el correspondiente movimiento en M .

La conexión de Cartan γ_c induce una conexión γ_o en el haz

$$\pi : T^*Q \times M \longrightarrow M .$$

en donde el espacio vertical lo identificamos con

$$V_{(\alpha_q, m)} = \ker T_{(\alpha_q, m)}\pi = T_{\alpha_q}(T^*Q) \times 0_m .$$

la 1-forma de conexión $\gamma_0 \in \Omega^1(T^*Q \times M; \ker T\pi)$ está dada por

$$\gamma_0(\alpha_q, m)(U_{\alpha_q}, U_m) = (U_{\alpha_q} + \mathcal{X}_{\mathcal{P}.U_m}(\alpha_q), 0_m)$$

donde $\mathcal{P}.U_m$ es la *función de momento* de $\mathcal{U} = (Tm^{-1} \circ U_m^T) \in \mathcal{X}(Q)$, definida por

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(T^*Q), \\ \mathcal{P}(U_m)(\alpha_q) &= \alpha_q \cdot (Tm^{-1}(U_m^T(q))). \end{aligned}$$

A la conexión γ_0 la llamaremos la *conexión inducida de Cartan*.

Observación. La proyección a Q del flujo del campo vectorial hamiltoniano $X_{(\mathcal{P}.U_m)}$ corresponde con el flujo de \mathcal{U} . La prueba de esta afirmación aparece en [12, capítulo 12].

Es fácil ver que levantamiento horizontal de un campo vectorial $Z \in \mathcal{X}(M)$ esta dado por

$$(hor_0 Z)(\alpha_q, m) = (-X_{\mathcal{P}.Z(m)}(\alpha_q), Z(m)).$$

5.1.3. La conexión de Hannay-Berry

Consideremos un haz fibrado $\pi : E \longrightarrow M$. Sea G un grupo de Lie. Una familia de G -acciones hamiltonianas en E es una acción izquierda L_g en E , con un mapeo de momento $I : E \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ definido por

$$I^\zeta(p) = I(p) \cdot \zeta$$

y para cada $\zeta \in \mathfrak{g}$

$$\zeta_E(p) = X_{I^\zeta}(p)$$

donde $\zeta_E(p) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (\exp s\zeta \cdot p)$ es el generador infinitesimal de la acción definida por ζ y X_{I^ζ} es el campo hamiltoniano de la función $I^\zeta : E \longrightarrow R$.

Teorema 1 (Promedio de una conexión). *Sea $\pi : E \longrightarrow M$ un haz fibrado y $\gamma \in \Omega^1(E, V)$ una conexión de Poisson-Ehresmann. Supongamos que un grupo de Lie G compacto actúa mediante una transformación de haz. Entonces el promedio $\langle \gamma \rangle$ es también una conexión de Ehresmann. Además la acción de G conmuta con el transporte paralelo respecto a la conexión $\langle \gamma \rangle$.*

A la conexión promediada $\langle \gamma \rangle$ que se obtiene a partir de una conexión γ dada se conoce como la *conexión de Hannay-Berry*.

A continuación explicamos a que nos referimos con el promedio $\langle \gamma \rangle$ que se menciona en el teorema anterior. Ya que G actúa en el haz por automorfismos, jalar atrás $(g^*\gamma)$ la conexión γ tiene la siguiente expresión

$$(g^*\gamma)(e)(v) = Tg^{-1} \cdot \gamma(g.e) \cdot Tg \cdot (v).$$

Además se cumple que $Tg : V_e \rightarrow V_{ge}$. Definimos el promedio de una conexión γ dada por la siguiente expresión

$$\langle \gamma \rangle = \frac{1}{|G|} \int_G (g^*\gamma) dg$$

donde dg es la medida de Haar y $|G|$ es el volumen de G .

La demostración del teorema 1 aparece en [11, teorema 6.1, p. 57].

5.1.4. La Conexión de Cartan-Hannay-Berry

En esta sección aplicamos el método de promediar de Hannay-Berry a la conexión inducida de Cartan, obteniendo una nueva conexión de acuerdo con la siguiente

Definición 10. La conexión de Cartan-Hannay-Berry es la conexión $\langle \gamma_0 \rangle$, que se obtiene de promediar la conexión γ_0 definida en el haz fibrado $\pi : T^*Q \times M \rightarrow M$.

El siguiente teorema nos caracteriza la conexión de Cartan-Hannay-Berry.

Teorema 2. Supongamos que un grupo de Lie G actúa en T^*Q con una acción izquierda y mapeo de momento equivariante $I : T^*Q \rightarrow \mathfrak{g}^*$. Si G define una acción hamiltoniana en $T^*Q \times M$ dejando que G actúe trivialmente en M , entonces se cumple lo siguiente

1. La condición de adiabaticidad: el transporte paralelo asociado a la conexión $\langle \gamma_0 \rangle$ preserva los conjuntos de nivel de I .
2. La conexión inducida de Cartan en $\pi : T^*Q \times M \rightarrow M$ define una conexión de Hannay-Berry dada por la 1-forma de conexión

$$\langle \gamma_0 \rangle(\alpha_q, m)(U_{\alpha_q}, U_m) = (U_{\alpha_q} + X_{\langle \mathcal{P}.U_m \rangle}(\alpha_q), 0).$$

Su levantamiento horizontal para $Z \in \mathcal{X}(M)$ tiene la expresión

$$(horZ)(\alpha_q, m) = (-X_{\langle \mathcal{P}.Z(m) \rangle}, Z(m)).$$

Demostración. Véase [11, teorema 11.3, p. 89]. □

La construcción del campo hamiltoniano $X_{\mathcal{P}, Z(m)}$ de la conexión de Cartan se obtiene del hamiltoniano para sistemas donde estamos considerando una superposición de movimientos tanto en la variedad Q como en el espacio de encajes M . A partir del lagrangiano del sistema $L : TQ \rightarrow R$ tomemos la transformada de Legendre.

$$\mathbb{F}L : TQ \rightarrow T^*Q$$

$$\mathbb{F}(v) \cdot w = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} L(v + sw) \quad \forall \quad v, w \in T_q Q.$$

Sea una curva $m_t \subset M$. Si la partícula en Q se mueve siguiendo una trayectoria $q(t) \in Q$, el movimiento de la partícula en el espacio ambiente S es la superposición de los movimientos tanto en Q como en M , el cual está descrito por la curva $m_t(q(t)) \subset S$. La velocidad de la partícula está dada por la expresión

$$T_{q(t)} m_t(\dot{q}(t)) + Z_t(m_t(q))$$

donde $Z_t(m_t(q)) = \frac{d}{dt} m_t(q)$ y $T_{q(t)} m_t(\dot{q}(t))$ es un elemento de $T_q m(TQ)$ que encaja en TS . Consideramos un lagrangiano en TQ

$$L_{m_t}(q, v) = \frac{1}{2} \|T_{q(t)} m_t(v) + Z_t(m_t(q))\|^2 - V(q) - U(m_t(q))$$

donde V es un potencial en Q y U es un potencial en S . De la definición de transformada de Legendre obtenemos

$$\frac{\partial L_{m_t}}{\partial v} \cdot w = p \cdot w = \langle T_{q(t)} m_t(v) + Z_t(m_t(q(t)))^T, T_{q(t)} m_t \cdot w \rangle_{m_t(q(t))}.$$

La expresión $p \cdot w$ indica la aplicación natural entre el covector $p \in T^*Q$ y el vector $w \in T_{q(t)}Q$, donde el vector $Z_t(m_t(q))^T$ denota la proyección ortogonal al espacio tangente $T_{m_t}(TQ)$ usando la métrica de S en $m_t(q(t))$, donde otra vez descomponemos a TS como

$$TS = T_m(Q) \oplus (T_m(Q))^\perp.$$

A Q lo dotamos de una métrica (Q, g) que depende del tiempo, inducida por el encaje m_t . Recordar que estamos considerando isometrías de S . El momento p en Q está dado por la siguiente expresión

$$\frac{\partial L_{m(q)}}{\partial v} \cdot w = \left\langle v + T_{q(t)} m_t^{-1} \cdot \left(Z(m_t(q(t))) \right), w \right\rangle_{q(t)}$$

donde en esta expresión estamos usando los paréntesis angulares para denotar el producto interior. Haciendo uso del producto interior para identificar T^*Q con TQ , tenemos que, de la definición $p = \partial L_{m(q)}/\partial v$ se obtiene

$$p = \left(v + (T_{q(t)}m_t \cdot [Z_t(m_t(q(t)))^T]) \right).$$

El Hamiltoniano del problema lo escribimos como

$$H = pv - L$$

$$H_{m_t}(q, p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 - P(Z_t) - \frac{1}{2}\|Z_t^\perp\|^2 + V(q) + U(m_t(q))$$

donde

$$Z_t = T_{q(t)}m_t^{-1} \cdot [Z_t(m_t(q))]^T$$

y

$$P(Z_t(q))(q, p) = \langle p, Z_t(q) \rangle.$$

El campo hamiltoniano $X_{P(Z_t)}$ de la función de momento $P(Z_t)$ representa las fuerzas no inerciales en el variedad S , también como vimos anteriormente corresponde al levantamiento horizontal del campo vectorial $Z \in \mathcal{X}(M)$ de una conexión γ_0 en el haz $\pi : T^*Q \times M \rightarrow M$.

5.2. Cálculo de la fase geométrica

El péndulo de Foucault visto como un sistema en movimiento consiste en un péndulo esférico tangente a la superficie de la tierra. Utilizando la conexión de Cartan-Hanny-Berry vamos a calcular la fase geométrica para este sistema.

Denotemos por \vec{q} el vector que indica la posición inicial de la masa del péndulo en el espacio de configuración $Q = S^2$ una esfera de radio $l = \|q\|$. Sea \vec{r}_0 el vector del centro de la tierra al punto de suspensión del péndulo, la posición del péndulo en el espacio está dada por $R_t(\vec{r}_0 + \vec{q})$ donde R_t es una rotación alrededor del eje z, la energía potencial del péndulo es $V(q) = mgl\vec{q} \cdot \hat{r}_0$ donde $\hat{r}_0 = \frac{\vec{r}_0}{\|\vec{r}_0\|}$. La velocidad (de la masa) del péndulo en el espacio está dada por la siguiente expresión

$$R_t\dot{q} + R_t[\vec{\omega} \times (\vec{r}_0 + \vec{q})]$$

donde $\vec{w} = w\hat{z}$ y w es la velocidad angular de la tierra.

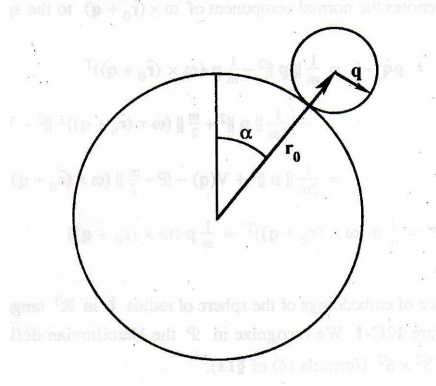


Figura 5.2: Péndulo de Foucault. (Figura tomada de [11].)

El lagrangiano del sistema está dado por

$$L = \frac{1}{2}m\|\vec{\omega} \times (\hat{r}_0 + \vec{q}) + \dot{\vec{q}}\|^2 - V(q)$$

aplicando la transformada de Legendre para calcular el momento, el cual está dado por la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(q, \dot{q} + sv) = \\ \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \frac{m}{2} [(\omega \times (\hat{r}_0 + \vec{q}) + \dot{\vec{q}} + s\vec{v}) \cdot (\omega \times (\hat{r}_0 + \vec{q}) + \dot{\vec{q}} + s\vec{v})] \end{aligned}$$

De aquí que

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot v = m[v \cdot (\omega \times (\hat{r}_0 + \vec{q}) + \dot{\vec{q}})^T]$$

donde $(\omega \times (\hat{r}_0 + \vec{q}) + \dot{\vec{q}})^T$ denota la componente tangencial al espacio de configuración S^2 . El momento \vec{p} está definido por la siguiente expresión

$$\vec{p} = m\left(\dot{\vec{q}} + \omega \times (\hat{r}_0 + \vec{q})\right)^T = m\left[\dot{\vec{q}} + (\vec{\omega} \times (\hat{r}_0 + \vec{q}))^T\right].$$

Proposición 7. *El hamiltoniano del péndulo de Foucault viene dado por la expresión*

$$H = \frac{1}{2m}\|p^2\| + V(q) - P - \frac{1}{2m}\|(\omega \times (\hat{r}_0 + q))^\perp\|^2$$

donde la función P está dada por

$$P = [p \cdot (\omega \times (\hat{r}_0 + q))^T].$$

Prueba: Vamos a identificar T^*S^2 en TS^2 a través de la métrica usual. Comenzamos con la definición

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{q}} - L.$$

Sustituyendo las expresiones para $\vec{p}, \dot{\vec{q}}$ y L obtenemos la siguiente expresión

$$H = \frac{1}{m} \|\vec{p}\|^2 - [\vec{p} \cdot (\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q}))^T] + V(q) - \frac{m}{2} \|(\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q}))^T + (\omega \times \vec{r}_0 + \dot{\vec{q}})^\perp + \dot{\vec{q}}\|^2$$

donde la velocidad de la masa del péndulo en el espacio, la hemos descompuesto en su parte componente tangencial y ortogonal al espacio de configuración del péndulo. De la bilinealidad del producto interno, la expresión anterior la podemos escribir como

$$H = \frac{1}{m} \|\vec{p}\|^2 - [\vec{p} \cdot (\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q}))^T] + V(q) - \frac{m}{2} \|(\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q}))^\perp\|^2 + m [(\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q}))^T \cdot \dot{\vec{q}}] + \frac{m}{2} \|(\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q}))^T\|^2$$

escribiendo $\dot{\vec{q}}$ en términos de \vec{p} se llega a la expresión del hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2m} \|p^2\| + V(q) - P - \frac{1}{2m} \|(\omega \times (\hat{r}_0 + q))^\perp\|^2.$$

En nuestro sistema físico tenemos dos movimientos superpuestos, el de oscilación del péndulo en la esfera, y el movimiento de rotación de la Tierra. El encaje del espacio de configuración del péndulo esférico que lo identifiquemos con S^2 al espacio ambiente $S = R^3$, está definido por la siguiente transformación

$$m : S^2 \longrightarrow R^3 \\ m(q) = R_t(r_{0\alpha} + \vec{q})$$

donde $r_{0\alpha}$ nos parametriza respecto al eje polar el punto de tangencia a la tierra del péndulo esférico, en este caso $\alpha \in [0, \pi]$ y $t \in [0, 2\pi]$ es el ángulo de rotación respecto al eje \hat{z} de la tierra, entonces el espacio de encajes M está definido por

$$M = \{(\alpha, t) \mid 0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

de aquí (α, t) parametrizan un esfera $M = S^2$, dada un $m \in M$ nos da el punto de tangencia del péndulo y el ángulo que ha sido rotado, trabajaremos en el haz fibrado

$$\pi : T^*S^2 \times S^2 \longrightarrow S^2.$$

La conexión γ_0 inducida por la conexión de Cartan, definida en la página 42, está dada por el levantamiento horizontal del campo vectorial hamiltoniano de la función de momento P

$$(hor_0 Z)(\alpha_q, m) = \left(-X_{p \cdot (\omega \times (\hat{r}_0 + q))}^T(\alpha_q), Z(m) \right) \quad \forall Z \in \mathcal{X}(S^2). \quad (5.1)$$

Vamos a considerar el grupo de Lie $G = S^1$ el cual va a actuar por rotaciones alrededor de \vec{r}_0 en el espacio fase del péndulo T^*S^2 , la acción está definida por

$$\begin{aligned} \Phi : S^1 \times T^*S^2 &\longrightarrow T^*S^2, \\ \Phi(\theta, (q, p)) &\longrightarrow (R_\theta \vec{q}, R_\theta \vec{p}) \end{aligned}$$

donde R_θ es la matriz

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La conexión de Cartan-Hannay-Berry es el levantamiento horizontal del campo hamiltoniano del promedio de la función de momento $\langle P \rangle$

$$\langle P \rangle = \langle p \cdot (\omega \times (\hat{r}_0 + q))^T \rangle$$

respecto al grupo G , su levantamiento horizontal está definido por

$$(hor_0 Z)(\alpha_q, m) = \left(-X_{\langle p \cdot (\omega \times (\hat{r}_0 + q))^T \rangle}(\alpha_q), Z(m) \right) \quad \forall Z \in \mathcal{X}(S^2).$$

Para calcular el promedio de $\langle P \rangle$ descomponemos el vector

$$(\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q})) = (\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q}))^T + (\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q}))^\perp$$

donde la componente ortogonal es la proyección sobre el vector \vec{q}

$$(\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q}))^\perp = \frac{(\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q})) \cdot \vec{q}}{\|\vec{q}\|^2} \vec{q},$$

de aquí que la componente tangencial está dada por la expresión

$$(\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q}))^T = [\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q})] - \left[\frac{(\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q})) \cdot \vec{q}}{\|\vec{q}\|^2} \right] \vec{q},$$

entonces

$$\langle \vec{p} \cdot (\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q}))^T \rangle = \langle \vec{p} \cdot (\omega \times (\vec{r}_0 + \vec{q})) \rangle.$$

Hagamos la siguiente observación:

Proposición 8. Si \vec{v} es un vector constante entonces el promedio de $\langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle$ se puede expresar como

$$\langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle = (\vec{v} \cdot \hat{r}_0) \langle \vec{p} \cdot \hat{r}_0 \rangle .$$

Prueba: Tomemos la base ortonormal dada por $(\hat{r}_0, \hat{a}, \hat{b})$, donde \hat{a} y \hat{b} están en el plano ortogonal a \hat{r}_0 y son ortonormales entre ellos. El vector \vec{v} lo escribimos en términos de la base $(\hat{r}_0, \hat{a}, \hat{b})$ de la siguiente manera

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \hat{r}_0) \hat{r}_0 + (\vec{v} \cdot \hat{a}) \hat{a} + (\vec{v} \cdot \hat{b}) \hat{b} ,$$

así que

$$\vec{p} \cdot \vec{v} = (\vec{v} \cdot \hat{r}_0) (\vec{p} \cdot \hat{r}_0) + (\vec{v} \cdot \hat{a}) (\vec{p} \cdot \hat{a}) + (\vec{v} \cdot \hat{b}) (\vec{p} \cdot \hat{b}) .$$

El promedio

$$\langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \Phi_\theta (\vec{p} \cdot \vec{v}) d\theta ,$$

del vector \vec{p} lo descomponemos en términos de la base ortonormal , dada por la siguiente expresión

$$\vec{p} = p_0 \hat{r}_0 + p_a \hat{a} + p_b \hat{b} ,$$

la acción Φ_θ al vector \vec{p} está definida por la siguiente multiplicación de matrices

$$\Phi_\theta \vec{p} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \text{sen } \theta & 0 \\ -\text{sen } \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_a \\ p_b \\ p_0 \end{pmatrix} ,$$

para calcular el promedio, tenemos que evaluar las siguientes integrales

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle &= (\vec{v} \cdot \hat{r}_0) \langle \vec{p} \cdot \hat{r}_0 \rangle + (\vec{v} \cdot \hat{a}) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [p_a \cos \theta + p_b \sin \theta] d\theta \\ &\quad + (\vec{v} \cdot \hat{b}) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-p_a \text{sen } \theta + p_b \cos \theta] d\theta , \end{aligned}$$

los dos últimos términos son igual a cero y el primer término no cambia ya que estamos rotando al rededor del eje \hat{r}_0 . Concluimos por lo tanto lo que se quería demostrar. \square

Utilizando el resultado anterior, vamos a calcular el promedio de la siguiente expresión

$$\langle \vec{p} \cdot (\omega \times (\hat{r}_0 + \vec{q}))^T \rangle = \langle \vec{p} \cdot (\omega \times (\hat{r}_0 + \vec{q})) \rangle ,$$

distribuyendo el producto cruz sobre la suma

$$\langle \vec{p} \cdot (\omega \times (\hat{r}_0 + \vec{q})) \rangle = \langle \vec{p} \cdot (\omega \times \hat{r}_0) \rangle + \langle \vec{p} \cdot (\omega \times \vec{q}) \rangle ,$$

en el primer término, si hacemos $\vec{v} = (\omega \times \hat{r}_0)$, se tiene (por la proposición 8) que

$$\langle \vec{p} \cdot (\omega \times \hat{r}_0) \rangle = [(\omega \times \hat{r}_0) \cdot \hat{r}_0] \langle \vec{p} \cdot \hat{r}_0 \rangle = 0$$

Llegamos por lo tanto a la siguiente

Proposición 9. *El promedio de la función de momento está dado por la expresión*

$$\langle P \rangle = \langle \vec{p} \cdot (\omega \times (\hat{r}_0 + q)) \rangle^T = \langle \vec{p} \cdot (\omega \times \vec{q}) \rangle = \langle \omega \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) \rangle .$$

El levantamiento horizontal de la conexión de Cartan-Hannay-Berry, corresponde al campo vectorial hamiltoniano del promedio de la función de momento, que para este problema corresponde generador infinitesimal de la acción de S^1 en T^*S^2 . Para justificar lo anterior, vamos a calcular el mapeo de momento de la acción y su campo vectorial hamiltoniano.

$$\begin{aligned} \Phi : S^1 \times T^*S^2 &\longrightarrow T^*S^2 , \\ \Phi(\theta, (q, p)) &\longrightarrow (R_\theta \vec{q}, R_\phi \vec{p}) . \end{aligned}$$

Si escribimos los vectores \vec{q} y \vec{p} en términos de los vectores $(\hat{r}_0, \hat{a}, \hat{b})$, el generador infinitesimal está definido por

$$X_\theta(q, p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (R_{t\theta} \vec{q}, R_{t\theta} \vec{p})$$

y la multiplicación de matrices para el vector \vec{q} está dada por

$$\left. \frac{d}{d\theta} \right|_{t=0} R_{t\theta} \vec{q} = \begin{pmatrix} \cos t\theta & \sin t\theta & 0 \\ -\sin t\theta & \cos t\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_a \\ q_b \\ q_0 \end{pmatrix} = \hat{r}_0 \times \vec{q} .$$

El calculo para el vector \vec{p} se hace de manera análoga y por lo tanto el generador infinitesimal lo identificamos con el vector

$$X_\theta(q, p) = (\hat{r}_0 \times \vec{q}, \hat{r}_0 \times \vec{p}) .$$

Por definición, se cumple que $X_\theta(q, p) = X_{I^\theta}(q, p)$, donde el campo vectorial hamiltoniano del mapeo de momento satisface las siguientes ecuaciones

$$X_{I^\theta}(q, p) = \left(\frac{\partial I^\theta(q, p)}{\partial p}, -\frac{\partial I^\theta(q, p)}{\partial q} \right) .$$

Igualando término a término, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial I^\theta(q, p)}{\partial p} &= (\hat{r}_0 \times \vec{q}) \\ -\frac{\partial I^\theta(q, p)}{\partial q} &= (\hat{r}_0 \times \vec{p}),\end{aligned}$$

integrando las ecuaciones obtenemos el mapeo de momento

$$I : T^*S^2 \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

el cual está definido por la expresión

$$I(q, p) = \vec{p} \cdot (r_0 \times \vec{q}).$$

Recordemos que, por la proposición 8, el promedio del campo hamiltoniano de la función de momento está dado por la siguiente expresión

$$\langle P \rangle = \langle \vec{\omega} \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) \rangle.$$

Si aplicamos la proposición 8 a la expresión anterior, haciendo $\vec{v} = \vec{\omega}$, se tiene que

$$\langle P \rangle = (\vec{\omega} \cdot \hat{r}_0) \langle \hat{r}_0 \cdot (\vec{q} \times \vec{p}) \rangle = (\vec{\omega} \cdot \hat{r}_0) \langle I(q, p) \rangle.$$

Pero el promedio de la función de momento $I = \langle \vec{q} \cdot (\vec{p} \times \hat{r}_0) \rangle = I$, ya que el producto cruz es invariante ante rotaciones

$$R_t \hat{r}_0 \times R_t \vec{p} = R_t (\hat{r}_0 \times \vec{p}),$$

y de la misma manera para el producto punto

$$R_t \vec{q} \cdot R_t (\vec{p} \times \hat{r}_0) = \vec{q} \cdot (\vec{p} \times \hat{r}_0).$$

De aquí el promedio de la función de momento está dado por la siguiente expresión

$$\langle P \rangle = I \omega \cos \alpha,$$

donde α es el ángulo entre \vec{r}_0 y el vector de velocidad angular $\vec{\omega}$.

El levantamiento horizontal de $Z \in \mathcal{X}(S^2)$ dado por la conexión de Cartan-Hannay-Berry está dado por la siguiente expresión

$$(-X_{\langle P \rangle}, Z) = (-X_{I \omega \cos \alpha}, Z),$$

El campo hamiltoniano está definido por

$$X_{I\omega \cos \alpha} = \omega \cos \alpha \left(\frac{\partial I(q, p)}{\partial p}, -\frac{\partial I(q, p)}{\partial q} \right),$$

de aquí que

$$X_{I\omega \cos \alpha} = \omega \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \theta},$$

donde $\partial/\partial\theta$ es el generador infinitesimal de la acción de S^1 en T^*S^2 . El levantamiento horizontal respecto a la conexión de Cartan-Hannay-Berry esta dado por

$$\left(-X_{\langle P \rangle}, Z \right) = \left(-\omega \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \theta}, Z \right).$$

Sea (α, ϕ) las coordenadas que parametrizan el espacio de encajes M

$$M = \{(\alpha, \phi) \mid 0 \leq \alpha \leq \pi, 0 \leq \phi \leq 2\pi\}.$$

La línea de flujo del campo vectorial $Z = \omega \frac{\partial}{\partial \phi}$ con ángulo de latitud α es la curva cerrada $\gamma(t) \in M$

$$\gamma(t) \longrightarrow (\alpha, \phi(t)) \quad \text{tal que} \quad \gamma(0) = \gamma(T)$$

donde T es el periodo de rotación de la tierra. El levantamiento horizontal de la conexión de Cartan-Hannay-Berry del campo vectorial $Z|_{\gamma}$ está dado por

$$\left(-X_{\langle P \rangle}, \omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right) = \left(-\omega \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \theta}, \omega \frac{\partial}{\partial \phi} \right).$$

Identificando

$$\dot{\theta} = -\omega \cos \alpha \quad \text{y} \quad \dot{\phi} = \omega$$

e integrando en un periodo T , se tiene que

$$\theta(0) - \theta(T) = \int_0^T -\omega \cos \alpha dt; \quad \int_0^{2\pi} d\phi = \omega T.$$

De la segunda ecuación obtenemos que $T = 2\pi/\omega$. Sustituyendo este valor en la primera ecuación, se sigue que

$$\theta(T) - \theta(0) = -2\pi \cos \alpha.$$

la cual corresponde a la holonomía de la conexión de Cartan-Hannay-Berry. Es decir aunque la tierra completa un ciclo completo en su movimiento de

rotación el péndulo no regresa a su estado inicial, sino que difiere por una fase, la cual corresponde a la rotación del plano de oscilación del péndulo.

En conclusión, hemos construido la conexión de Cartan-Hannay-Berry, la cual nos ha permitido comparar los movimientos superpuestos, el de oscilación del péndulo en T^*S^2 y de la rotación de la tierra vista como una curva en M , promediando la conexión inducida de Cartan respecto a $G = S^1$ con lo cual hemos podido comparar los péndulos esféricos inicial y final después de un periodo de rotación de la tierra.

Capítulo 6

Conclusiones

En esta tesis hemos calculado la *fase geométrica del péndulo de Foucault* de tres maneras diferentes: dos de ellas en un contexto puramente geométrico, mostrando que la fase geométrica del péndulo de Foucault se interpreta como la holonomía de una conexión en un haz fibrado, y una desde el punto de vista de la física de sistemas en movimiento, mostrando como la fase geométrica se puede ver como una manifestación de la fuerza de Coriolis.

El ejemplo de la fase geométrica para el péndulo de Foucault nos enseña como la física y la geometría están estrechamente relacionadas, ya que para calcular la fase geométrica el ingrediente principal es el transparte paralelo, que es un concepto puramente geométrico, pero el cual está condicionado por la física del problema. Para el caso del Péndulo de Foucault, la física del problema se puede capturar postulando que el plano de oscilación del péndulo no rota instantáneamente respecto al eje radial de la Tierra. Matemáticamente, esto se describe diciendo que, en el haz fibrado natural para describir el problema, que es el haz tangente a la esfera $\pi : TS^2 \rightarrow S^2$, se anula la derivada covariante del vector \vec{v} de dirección de oscilación. Es decir, \vec{v} es un campo paralelo (sobre la curva que describe el laboratorio cuando la tierra rota) con respecto a la conexión de *Ehresmann-Levi-Civita*.

Uno de los objetivos que nos planteamos en esta tesis, fue el de simplificar el cálculo de la fase geométrica utilizando la teoría sobre la holonomía asociada a una conexión. Nos dimos cuenta que esto no lo podíamos hacer trabajando directamente con la conexión de Ehresmann-Levi-Civita. Sin embargo, algo interesante ocurre cuando llevamos esta conexión al haz tangente unitario

$$\pi : (TS^2)^1 \rightarrow S^2$$

pues esto resulta en que la conexión se vuelve equivariante y la fase geométrica se obtiene directamente de la fórmula integral (3.3) para holonomía de una conexión principal, sin necesidad de resolver una ecuación diferencial. De esta manera la fase geométrica aparece por efectos de la curvatura de S^2 .

De este ejercicio, surge la pregunta: ¿Dado un sistema hamiltoniano con simetría, bajo qué condiciones podemos garantizar que la conexión asociada a la reducción del sistema está descrita por una conexión principal? No hemos podido encontrar referencias que den luz a esta pregunta general.

El objetivo final de la tesis fue relacionar los efectos no inerciales de la fuerza de Coriolis con aspectos geométricos, los cuales están capturados por la conexión de Cartan-Hannay-Berry, toda vez que el transporte paralelo de esta conexión está dado por un campo vectorial hamiltoniano (5.1) que se obtiene del momento asociado con la componente tangencial de la fuerza de Coriolis.

Hay una justificación adicional para el uso de la conexión de Cartan-Hannay-Berry, que es la siguiente. Podemos usar la adiabaticidad del problema para desacoplar el movimiento del péndulo con respecto al movimiento de rotación de la Tierra. Ésta noción de adiabaticidad viene de tener dos escalas de tiempo completamente diferentes, por un lado el periodo de oscilación del péndulo que es del orden de segundos comparado con el periodo de rotación de Tierra que es del orden de horas. Desde el punto de vista geométrico, hemos capturado la adiabaticidad mediante la promediación de la conexión de Cartan alrededor del eje radial \vec{r} , obteniendo de esta manera una conexión invariante ante rotaciones alrededor de dicho eje. Lo que resulta es precisamente la conexión de Cartan-Hannay-Berry. Así, el cálculo de la holonomía se reduce a integrar las ecuaciones de Hamilton sobre un periodo completo de oscilación de la Tierra.

Finalmente, hacemos notar que todos los cálculos de la fase geométrica del péndulo de Foucault nos han llevado al mismo resultado:

Después de una rotación completa de la Tierra, el plano de oscilación de un péndulo rota un ángulo igual a 2π multiplicado por el coseno de la colatitud de la ubicación del péndulo.

Bibliografía

- [1] Y.Aharonov y J.Anandan, Phase Change During a Cyclic Quantum Evolution, *Phys. Rev. Lett.*, 51 (1987): 1593–1596.
- [2] M. Berry, Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes. *Proc. R. Soc. London A392*, 45 (1984).
- [3] M. Berry, Anticipations of the Geometric Phase, *Physics Today*, December (1990).
- [4] Berry M. Berry, The adiabatic phase and Pancharatnam’s phase for polarized light. *J. of Modern Optics*, 34(1987):1401-1407.
- [5] A. Tomita, R, Chiao, Observation of Berry’s Topological Phase by Use of an Optical Fiber. *Phys. Rev. Lett.*, 57(1986): 937-940.
- [6] D. Chruściński y A. Jamiolkowski, *Geometric Phases un Classical and Quantum Mechanics*, Birkhäuser 2004.
- [7] Do’ Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhauser 1992.
- [8] J. Hanny, Angle variable holonomy un adiabatic excursion of an integrable Hamiltonian. *J. Phys. A:Math. Gen* 18, 221-230
- [9] S. Kobayashi an K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry Vol 1*,Wiley Classics Library, 1969 .
- [10] H.C. Loguet-Higgins, U. Öpik, M.H.L. Pryce and R. A. Sack, Studies of the Jhon-Taller effect. II. The dynamical problem, *Proc.Roy.Soc.London*, A 244 (1958): 5765-5775.
- [11] Marsden, J.E., Montgomery, R. y Ratiu T., Reduction, symmetry and phases un mechanics. *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol. 88(436), 1990.

- [12] Jerrold E. Marsden y Tudor S. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry*, Springer 1999.
- [13] Oprea, J. Geometry and the Foucault Pendulum. *The American Mathematical Monthly*, **102**:6, pp. 515-522, junio-julio 1995.
- [14] S. Pancharaman, Generalized theory of interference and its applications, *Proc. Ind. Acad. Sci. Ser. A* 44 (1956): 247-262.
- [15] S. M. Tytov, Dokl. Akad. Nauk. USSR **18**, 263 (1938); reimpresso en ref. 4, pp. 6–11, de V. V. Vladimirkii, Dokl. Akad. Nauk. USSR **21**, 222 (1941).
- [16] J. Samuel y R. Bhandari, General Setting for Berry's Phase, *Phys. Rev. Lett.* 60, 2339 (1988).
- [17] V. V. Vladimirkii, *Dokl. Akad. Nauk*, USSR, 21(1941): 222.